Kapitola 1

Lineární programování

V této kapitole se budeme zabývat jednou z rozsáhlých oblastí aplikované matematiky zvanou lineární programování, jednou z nejstarších disciplín operačního výzkumu. Tato oblast úzce navazuje na teorii lineární algebry, speciálně teorii lineárních nerovností, která byla propracována již na počátku 19. století maďarským matematikem Juliusem Farkasem. Bouřlivý rozvoj lineárního programování však nastal až v době kolem 2. světové války a byl vyvolán nutností řešit složité ekonomické problémy. Mezi první matematiky zabývající se tímto problémem byl ruský matematik Leonid Vitaliyevich Kantorovich, který v roce 1939 matematicky zformuloval daný problém a tím dal základ celému odvětví. Otcem lineárního programování však můžeme nazvat až amerického matematika George Bernarda Dantziga, který v roce 1947 uvedl algoritmus na řešení úlohy lineárního programování. Tato metoda se nazývá simplexová metoda a je využívána dodnes.

Lineární programování se řadí do široké skupiny úloh matematického programování, což je speciální druh optimalizačních úloh. Jak název napovídá, celé odvětví se zabývá řešením lineárních úloh, speciálně řešením problému nalezení optima (minima resp. maxima) lineární funkce n proměnných na množině dané podmínkami popsanými soustavou lineárních rovností a nerovností.

1.1 Matematická formulace problému

Jak již bylo v úvodu řečeno, úloha lineární optimalizace se skládá z omezujících podmínek vyjádřených jako lineární rovnosti či nerovnosti a z lineární tzv. účelové funkce. Úkolem úlohy je nalézt řešení splňující všechna omezení, která optimalizují (tj. minimalizují či maximalizují) účelovou funkci. Jinými slovy hledáme extrém (minimum či maximum) lineární funkce n proměnných při splnění podmínek vyjádřených lineárními rovnicemi či nerovnicemi.

Z matematiky víme, že každou nerovnici můžeme převést na rovnici o větším počtu neznámých, než měla původní nerovnice a také víme, že hledání minima funkce můžeme převést na hledání maxima upravené funkce. Z tohoto důvodu můžeme formulovat obecnou úlohu lineárního programování následovně.
Nalézt maximum lineární funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.1}$$

za splnění podmínek

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \tag{1.2}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

Účelová funkce

Funkce (1.1), jejíž maximum hledáme nazýváme účelovou funkcí.

Vlastní omezení úlohy

Rovnice (1.2) nazýváme vlastními omezeními úlohy.

Podmínky nezápornosti

Nerovnice (1.3) nazýváme podmínkami nezápornosti.

Úlohu lineárního programování lze zapsat stručně a přehledně v maticovém tvaru.

Nalézt maximum lineární funkce

$$z = (\mathbf{c})^T \mathbf{x} \tag{1.4}$$

při splnění podmínek

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{1.6}$$

kde matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ nazýváme **maticí strukturálních koeficientů**,

vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ nazýváme **vektorem řešení**,

vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ nazýváme **vektorem omezení**, nebo-li, **vektorem pravých stran**,

vektor $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ nazýváme **vektorem cen**,

vektor $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ je nulový vektor.

1.1. Vytvořte matematický model následující úlohy LP.

Dílna vyrábí dva výrobky V1 a V2, výrobek V1 prodává za dva tisíce Kč a výrobek V2 prodává také za dva tisíce Kč. Na výrobu obou výrobků potřebuje jednak surovinu S1, a to 3 kg na každý kus výrobku V1 a 1 kg na každý kus výrobku V2. Dále na výrobu obou výrobků potřebuje surovinu S2, a to 2 g na každý výrobek V1 a 3 g na každý výrobek V2. Dílna má na den k dispozici 6 kg suroviny S1 a 11 g suroviny S2. Jak máme v dílně naplánovat denní výrobu, pokud nesmíme překročit disponibilní množství obou surovin a naším cílem je optimalizovat tržby?

Řešení: Nejdříve si musíme uvědomit, co a jak chceme optimalizovat a na základě této informace určíme, kolik a jaké budeme mít neznámé, a sestrojíme účelovou funkci.

V našem případě vidíme, že chceme optimalizovat tržby. Tržby jistě chceme mít co největší, proto budeme naši účelovou funkci maximalizovat.

A z čeho máme tržby? Peníze jednak získáváme z výrobku V1, a to 2 tisíce Kč za každý kus, a jednak z výrobku V2, a to rovněž 2 tisíce Kč za každý kus. Množství peněz, které můžeme získat za všechny výrobky V1 vypočítáme vynásobením množství výrobků V1 a jednotkové ceny 2 tisíce Kč. Obdobně vypočítáme i tržby za všechny výrobky V2. Celkové tržby pak vypočteme součtem obou těchto hodnot.

Jediné hodnoty, které v předchozí úvaze neznáme, jsou jednak množství výrobku V1 a jednak množství výrobku V2. Toto tedy budou dvě naše neznámé. Označme je x_1 a x_2. Účelová funkce bude mít následující tvar (jednotky pro tržby jsou tisíce Kč):

$$z = 2x_1 + 2x_2 \ldots \text{max}$$

Nyní se zaměříme na omezující podmínky. V textu postupně nalezneme všechna omezení. Vidíme, že máme k dispozici pouze 6 kg suroviny S1. Kde a jak tuto surovinu spotřebováváme? Ze zadání vidíme, že potřebujeme 3 kg této suroviny na výrobu každého výrobku V1. Vyrobíme x_1 výrobků V1, proto celkové množství suroviny S1 na výrobu všech výrobků V1 bude $3x_1$ kg.

Obdobnou úvahou zjistíme, že na celkovou výrobu všech výrobků V2 potřebujeme $1x_2$ kg. Celkové množství spotřebované suroviny S1 získáme jako součet obou těchto hodnot. Toto spotřebované množství nesmí přesáhnout 6 kg, může tedy být menší nebo rovno 6 kg. Vlastní omezení týkající se množství suroviny S1 bude vypadat následovně:

$$3x_1 + 1x_2 \leq 6$$

Dále víme, že máme k dispozici pouze 11 g suroviny S2, kterou spotřebováváme jednak na výrobek V1, a to 2 g na každý tento výrobek, a jednak potřebujeme 3 g na každý výrobek V2. Z této informace vytvoříme druhé vlastní omezení:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 11$$

Tím máme popsány všechny podmínky vlastního omezení. Nesmíme však zapomenout na ošetření podmínek nezápornosti. Obě proměnné vyjadřují počty výrobků. Je tedy zřejmé, že obě proměnné nemohou nabývat záporných hodnot. Proto budou pro obě proměnné muset platit podmínky nezápornosti.

Nyní již shrneme celý výsledný matematický model naší úlohy LP:

$$\begin{aligned}
z &= 2x_1 + 2x_2 \ldots \text{max} \\
3x_1 + 1x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 11 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

1.2. Vytvořte matematický model následující úlohy LP.

Podnik vyrábí dva druhy výrobků - V1 a V2. Ve sledovaném období máme k dispozici pouze 180 hodin práce potřebného odborníka, přičemž tohoto odborníka potřebujeme 2 hodiny při výrobě každého výrobku V1 a 1 hodinu na výrobu každého kusu výrobku V2. Potřebujeme vyrobit výrobků V1 nejvýše o 5 více než je polovina počtu výrobků V2. Naopak výrobků V2 můžeme vyrobit maximálně o 30 více než výrobků V1. Jak máme naplánovat výrobu, pokud je naším cílem optimalizovat zisky a víme, že na každém výrobku V1 máme zisk 300 Kč a na každém výrobku V2 získáme 400 Kč?

Řešení: Nejdříve si musíme uvědomit, co a jak chceme optimalizovat a na základě této informace určíme, kolik a jaké budeme mít neznámé, a sestrojíme účelovou funkci.

V našem případě vidíme, že chceme optimalizovat zisky. Zisky jistě chceme mít co největší, proto budeme naši účelovou funkci maximalizovat.

A z čeho máme zisky? Peníze jednak získáváme z výrobku V1, a to 300 Kč za každý kus, a jednak z výrobku V2, a to 400 Kč za každý kus. Množství peněz, které můžeme získat za všechny výrobky V1 vypočítáme vynásobením množství výrobků V1 a jednotkového zisku 300 Kč. Obdobně vypočítáme i zisky ze všech výrobků V2. Celkové zisky pak vypočteme součtem obou těchto hodnot.

Jediné hodnoty, které v předchozí úvaze neznáme, jsou jednak množství výrobku V1 a jednak množství výrobku V2. Toto tedy budou dvě naše neznámé. Označme je x_1 a x_2. Účelová funkce bude mít následující tvar:

$$z = 300x_1 + 400x_2 \ldots \max$$

Nyní se zaměříme na omezující podmínky. V textu nalezneme všechna omezení. Vidíme, že máme k dispozici pouze 180 hodin práce odborníka. Pro který výrobek a na jak dlouho práci odborníka potřebujeme? Jednak při výrobě každého kusu výrobku V1 potřebujeme odborníka na 2 hodiny. Již jsme si řekli, že celkově vyrobené množství výrobků V1 označíme jako x_1, tedy na celou výrobu všech výrobků V1 potřebujeme odborníka na $2x_1$ hodin.

Obdobnou úvahou zjistíme, že na celkovou výrobu všech výrobků V2 potřebujeme odborníka na $1x_2$ hodin. Celkové množství hodin práce odborníka získáme jako součet obou těchto hodnot. Doba, po kterou potřebujeme odborníka nesmí přesáhnout 180 hodin, musí být tedy menší nebo rovna 180 hodinám. Vlastní omezení týkající se hodin odborníka bude vypadat následovně:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 180$$

Dále víme, že potřebujeme vyrobit výrobků V1 nejvýše o 5 více než je polovina počtu výrobků V2. Z této informace vytvoříme druhé vlastní omezení:

$$x_1 \leq \frac{x_2}{2} + 5$$

Tuto nerovnici můžeme upravit do standardizovaného tvaru, kdy na levé straně nerovnice máme výraz obsahující všechny proměnné a na pravé straně je číslo.

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 5$$

Jako poslední si musíme uvědomit, že výrobků V2 můžeme vyrobit maximálně o 30 více než výrobků V1. Z této informace vytvoříme poslední vlastní omezení:

$$x_2 \leq x_1 + 30$$

Tuto nerovnici můžeme upravit do standardizovaného tvaru:

$$-x_1 + x_2 \leq 30$$

Tím máme popsány všechny podmínky vlastního omezení. Nesmíme však zapomenout na ošetření podmínek nezápornosti. Obě proměnné vyjadřují počty výrobků. Je tedy zřejmé, že obě proměnné nemohou nabývat záporných hodnot. Proto budou pro obě proměnné muset platit podmínky nezápornosti.

Nyní již shrneme celý výsledný matematický model naší úlohy LP.

$$\begin{aligned}
z &= 300x_1 + 400x_2 \ldots \max \\
2x_1 + 1x_2 &\leq 180 \\
1x_1 - \frac{1}{2}x_2 &\leq 5 \\
-1x_1 + 1x_2 &\leq 30 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

1.2 Řešení matematického modelu úlohy LP

Než přistoupíme k výkladu metod pro hledání optima úlohy LP, popišme základní principy, na nichž naše postupy výpočtů budou založeny. Nejdříve definujme základní typy řešení úlohy lineárního programování.

Přípustné řešení

Vektor, jehož složky splňují všechna vlastní omezení úlohy (1.2) a zároveň všechny podmínky nezápornosti (1.3), nazveme přípustným řešením.

Nepřípustným řešením nazveme každé řešení, které není přípustné, tj. které nesplňuje buď některou z podmínek vlastního omezení či některou z podmínek nezápornosti.

Optimální řešení

Přípustné řešení, které maximalizuje (resp. minimalizuje) účelovou funkci (1.1), nazveme optimálním řešením.

Ve většině případů má úloha LP nekonečně mnoho přípustných řešení. Není však výjimkou, že z důvodu vzájemně si odporujících vlastních podmínek nemá úloha LP žádné přípustné řešení. relativně ojedinělým případem je stav, kdy má úloha LP jedinné přípustné řešení. Toto vše vyplývá z teorie týkající se řešení soustav lineárních rovnic.

Úloha LP může mít žádné, jedno nebo nekonečně mnoho optimálních řešení. V případě, že existuje více optimálních řešení, musí mít samozřejmě všechna shodnou hodnotu účelové funkce.

Ale jak najít optimální řešení mezi nekonečně mnoha přípustnými? To je dost obtížný úkol. Naštěstí nemusíme hledat optimum mezi nekonečně mnoha přípustnýni řešeními, ale můžeme se soustředit na průzkum pouze konečné podmnožiny obsahující tzv. základní, neboli bazická řešení.

Základní řešení

Přípustné řešení, které má tolik kladných složek, kolik lineárně nezávislých rovnic tvoří vlastní omezení (1.2), nazveme základním řešením.

S pojmem základní řešení se můžeme setkat v lineární algebře. Zopakujme si, kdy a jak jej ze soustavy obdržíme. Víme, že soustava *m* rovnic o *n* neznámých má, v případě řešitelnosti, právě jedno řešení, pokud $n = m$ a nekonečně mnoho řešení, pokud $n > m$. Pokud tedy dosadíme (v obecném případě $n \geq m$) za libovolných $n - m$ proměnných nulu a zbylé proměnné budeme dopočítávat, obdržíme soustavu *m* rovnic o *m* neznámých, která již má právě jedno řešení.

Počet základních řešení soustavy m rovnic o n neznámých můžeme vypočítat jako počet kombinací bez opakování, a to m-té třídy z n prvků, tedy:
$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$
V úloze LP máme navíc podmínky nezápornosti, které ještě některé z těchto řešení mohou vyřadit z důvodu zápornosti některé ze složek. Tedy výše uvedený počet je horní hranicí počtu všech základních řešení úlohy LP.

Princip řešitelnosti úloh LP je shrnut ve větě, která je nazývána jako základní věta lineárního programování.

Základní věta lineárního programování

Má-li úloha lineárního programování přípustné optimální řešení, má také optimální řešení základní.

Někdy se může stát, že i některá z dopočítávaných složek vyjde nulová. To znamená, že výsledný vektor bude mít více než $n-m$ nulových složek. V takovém případě mluvíme o tzv. degenerovaném řešení.

Degenerované řešení

Přípustné řešení, které má méně kladných složek, než je lineárně nezávislých rovnic tvořících vlastní omezení (1.2), nazveme degenerovaným řešením.

Bohužel, základní věta nám vypovídá o existenci základního optimálního řešení, ale o existenci degenerovaného optimálního řešení není nic známo, tj. může a nemusí existovat.

Proto v případě, kdy se v úloze vyskytne degenerované řešení, můžeme mít závažné problémy při hledání optima. Tyto potíže blíže popíšeme později.

1.3. Máme úlohu lineárního programování s následujícími podmínkami vlastního omezení.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
-2x_1 + x_2 &\leq 2 \\
x_1 - x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Jaký typ řešení je vektor

a) (0, 2),

b) (-1, -1),

c) (0, 0),

d) (1, 1),

e) (3, 3)?

Řešení: V každém příkladu budeme ověřovat podmínky pro jednotlivé typy řešení. Vždy nejdříve zjistíme, zda se jedná o přípustné řešení či nikoliv. Musíme si uvědomit, že přípustné řešení nemusí splňovat jen vlastní omezení, která máme uvedena v zadání, ale i podmínky nezápornosti (1.3). V případě, že se bude jednat o přípustné řešení, budeme dále zjišťovat, zda se jedná i o základní, respektive degenerované řešení.
K tomu potřebujeme znát jednak počet lineárně nezávislých rovnic a počet neznámých dané soustavy. Nejprve převedeme všechny nerovnice na rovnice, a to tak, že do každé nerovnice přidáme jednu proměnnou. Výsledná soustava rovnic bude vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
-2x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\
x_1 - x_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Nyní musíme ověřit, zda se jedná o lineárně nezávislé rovnice. Případ, že by rovnice byly lineárně závislé, by v praxi znamenal, že některé z podmínek vlastního omezení jsou na sobě závislé, tj. vypovídají o stejných faktických podmínkách.

Lineární závislost či nezávislost můžeme například ověřit přes hodnost matice soustavy. Připomeňme si poznatek z lineární algebry, že vektory jsou lineárně nezávislé, právě když matice, jejíž řádky jsou tvořeny sledovanými vektory, má hodnost rovnou počtu řádků.

Vytvoříme si tedy nejprve matici soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tu nyní upravíme následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ve výsledné matici jsou tři nenulové řádky, proto je hodnost matice tři a tedy všechny tři řádky jsou lineárně nezávislé.

Vidíme, že máme soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých, tedy $n = 4$ a $m = 3$. Počet nulových složek základního řešení bude $n - m = 4 - 3 = 1$. Vektor, který bude mít více než jednu nulu bude degenerovaným řešením.
Nyní již můžeme přistoupit k vyhodnocení každého z nabízených vektorů.

a) Zároveň s ověřováním přípustnosti řešení rozšíříme vektor (0, 2) ze zadání o další ze čtyř složek, a to o složku x_3, která byla přidána při úpravě první nerovnice na rovnici a složku x_4 přidanou při úpravě druhé nerovnice na rovnici. Ověření s dopočtem provedeme dosazením prvních dvou složek vektoru, tedy $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 0 + 2 + x_3 &= 4 \\ -2 \cdot 0 + 2 + x_4 &= 2 \\ 0 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Hned na první pohled vidíme, že tato soustava je neřešitelná, protože poslední rovnost je nesmyslná.

Uvedený vektor je tedy nepřípustným řešením. Dále již zjevně nemá smysl zkoumat, jestli je základním či degenerovaným řešením, protože v požadavcích na příslušnost k oběma těmto typům je nutnost přípustnosti daného řešení.

b) Pokud jsme dostatečně všímaví, můžeme vidět, že vektor (-1, -1) nemůže být přípustným řešením, protože má obě zadané složky záporné, což je v rozporu s podmínkami nezápornosti. Uvedený vektor je tedy opět nepřípustným řešením. Dále již opět nemá smysl zkoumat, jestli je základním či degenerovaným řešením.

c) Opět provedeme ověření přípustnosti zadaného vektoru (0, 0) společně s dopočtem zbývajících dvou složek pomocí dosazení zadaných hodnot za první dvě proměnné v soustavě rovnic. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + x_3 &= 4 \\ -2 \cdot 0 + 0 + x_4 &= 2 \\ 0 - 0 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice obdržíme hodnotu $x_3 = 4$ a z druhé $x_4 = 2$. Poslední rovnost zjevně platí. Rozšířený vektor (0, 0, 4, 2) má všechny složky nezáporné a odpovídá všem zadaným rovnicím, je tedy přípustným řešením dané úlohy LP.

Nyní již stačí ověřit, zda se jedná o základní, či degenerované řešení. Vidíme, že vektor má dvě nulové složky, tedy více než jednu, proto se jedná o degenerované řešení.

d) Opět provedeme ověření přípustnosti zadaného vektoru (1, 1) společně s dopočtem zbývajících dvou složek pomocí dosazení zadaných hodnot za první dvě proměnné v soustavě rovnic. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1+1+x_3 &= 4 \\ -2\cdot 1+1+x_4 &= 2 \\ 1-1 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice obdržíme hodnotu $x_3 = 2$ a z druhé $x_4 = 3$. Poslední rovnost zjevně platí. Rozšířený vektor (1, 1, 2, 3) má všechny složky nezáporné a odpovídá všem zadaným rovnicím, je tedy přípustným řešením dané úlohy LP.

Vidíme, že vektor nemá žádnou nulovou složku, proto není ani základním ani degenerovaným řešením, ale je tedy pouze řešením přípustným.

e) I v posledním případě provedeme ověření přípustnosti zadaného vektoru (3, 3) společně s dopočtem zbývajících dvou složek pomocí dosazení zadaných hodnot za první dvě proměnné v soustavě rovnic. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3+3+x_3 &= 4 \\ -2\cdot 3+3+x_4 &= 2 \\ 3-3 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice obdržíme hodnotu $x_3 = -2$ a z druhé $x_4 = 5$. Poslední rovnost zjevně platí. Rozšířený vektor (3, 3, -2, 5) má třetí složku zápornou a proto je porušena jedna z podmínek nezápornosti, vektor je tedy nepřípustným řešením dané úlohy LP.

Zápornost třetí složky dopočítaného vektoru odpovídá faktu, že nebyla splněna první z původních podmínek vlastního omezení, a to první nerovnice. Vidíme, že opravdu zjevně neplatí $3 + 3 \leq 4$.

Mohli jsme si všimnout, že v příkladu 1.3 se nám vyskytly vektory, které se ukázaly být přípustnými, nepřípustnými, či degenerovanými řešeními. Nevyskytl se však žádný vektor, který by byl řešením základním. Opravdu v úloze LP popsané v tomto příkladu žádné základní řešení neexistuje?

1.4. Nalezněte všechna základní řešení úlohy LP popsané v příkladu 1.3.

Řešení: Nejprve si znovu připomeňme, co to je základní řešení. Víme, že musí být jednak řešením přípustným, tj. musí odpovídat všem podmínkám vlastního omezení (ať už v původní podobě nerovnic či v upravené podobě rovnic) a musí splňovat podmínky nezápornosti (tedy mít všechny složky nezáporné). Navíc musí mít přesně daný počet nulových složek. V našem případě je počet složek, jejichž hodnota je nula, roven hodnotě vypočítané $n - m = 4 - 3 = 1$.
Jaký tedy zvolíme postup při hledání základního řešení?
Zvolíme jednu ze složek a její hodnotu položíme rovnu nule. Tím zajistíme onen přesně daný počet nul. Dosazením této nulové složky do soustavy rovnic vzniklé z úlohy LP obdržíme soustavu *m* (lineárně nezávislých) rovnic o *m* neznámých, která má právě jedno řešení. Konkrétně v našem případě, zvolíme-li například $x_3 = 0$, obdržíme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+0 &= 4 \\ -2x_1+x_2+x_4 &= 2 \\ x_1-x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledným řešením této soustavy rovnic je $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_4 = 4$.
To znamená, že vektor (2, 2, 0, 4) je základním řešením naší úlohy LP.
Existuje ještě jiné základní řešení?

Případné jiné základní řešení bychom našli dosazením nuly za jinou z neznámých v soustavě rovnic, tedy buď za x_1, nebo x_2, nebo x_4. Přičemž si můžeme všimnout, že na základě třetí rovnice je $x_1 = x_2$, tedy pokud by byla jedna z těchto neznámých rovna nule, bude rovna nule i druhá. Volit nulu za tyto dvě neznámé tedy nemůžeme, protože bychom ve výsledném vektoru neměli jednu, ale dvě nulové složky, což by bylo v rozporu s definicí základního řešení.
Zbývá nám tedy pouze možnost zvolit $x_4 = 0$. V tomto případě obdržíme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 + 0 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Jejím výsledným řešením je $x_1 = -2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 8$.
Bohužel vidíme, že vektor (-2, -2, 8, 0) sice odpovídá naší soustavě rovnic a má přesně jednu složku nulovou, ale má první dvě složky záporné, čili nesplňuje podmínky nezápornosti. Proto neodpovídá definici přípustného a tím ani základního řešení.
Jediným základním řešením popsané úlohy LP je vektor (2, 2, 0, 4).

1.3 Grafické řešení úlohy LP

Výše popsané principy jsou dobře a názorně vidět v grafickém znázornění úlohy LP pro případ, že se nám v úloze vyskytují pouze dvě neznámé.

Představme si zjednodušenou verzi úlohy LP popsanou pomocí rovnic a nerovnic 1.1, 1.2 a 1.3. Máme tedy úlohu LP s účelovou funkcí o dvou neznámých, *m* nerovnicích o dvou neznámých a dvou podmínkách nezápornosti.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \dots \max \tag{1.7}$$

za splnění podmínek

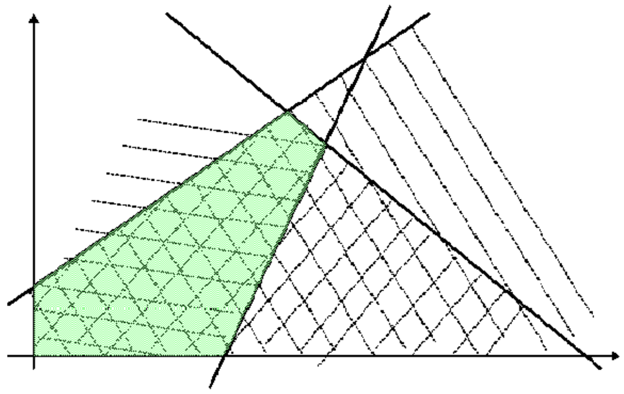
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \tag{1.8}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{1.9}$$

Nejprve vytvoříme množinu všech přípustných řešení. K tomu si musíme uvědomit, co je grafickým znázorněním lineární nerovnice o dvou neznámých. Jistě víme, že grafickým obrazem lineární rovnice o dvou neznámých je přímka, která nám celou rovinu dělí na dvě části, tj. poloroviny. Pro všechny body této přímky platí rovnost popsaná danou rovnicí a pro všechny body mimo tuto přímku tato nerovnost neplatí. Pokud neplatí rovnost, musí platit jedna z nerovností $(<, >)$. Na jedné straně od přímky platí pro všechny body jedna z těchto nerovností, pro všechny body na straně druhé nerovnost opačná.

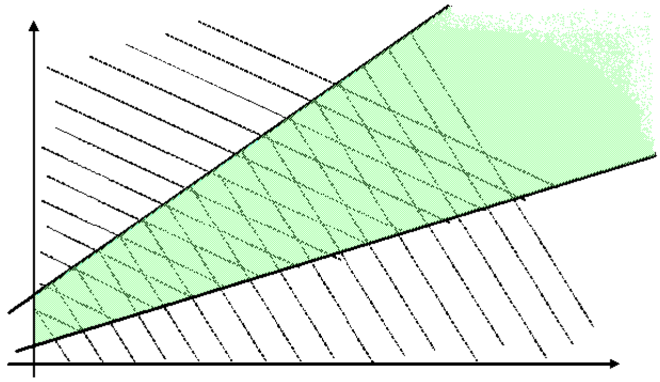
Grafickým obrazem lineární nerovnic o dvou neznámých je tedy polorovina. Průnikem všech polorovin odpovídajícím všem nerovnicím vlastního omezení a podmínek nezápornosti bude množina všech přípustných řešení.

Z popsané konstrukce množiny všech přípustných řešení je zřejmé, že tato množina může být:

1. konvexní omezená množina - viz obrázek 1.1
2. konvexní neomezená množina - viz obrázek 1.2
3. prázdná množina - viz obrázek 1.3



Obrázek 1.1: Omezená konvexní množina přípustných řešení



Obrázek 1.2: Neomezená konvexní množina přípustných řešení

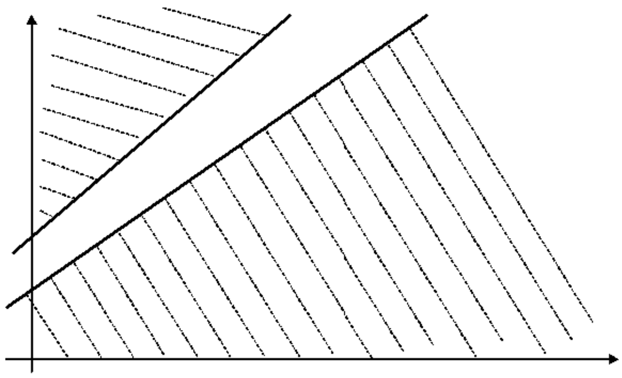
Vrcholy množiny všech přípustných řešení představují základní řešení úlohy LP.

V dalším kroku postupu budeme v rámci množiny všech přípustných řešení optimalizovat (např. maximalizovat) účelovou funkci. K tomu si opět uvědomme, co je grafickým znázorněním této funkce, co vlastně předpis účelové funkce představuje. Jedná se v podstatě o rovnici o třech neznámých. K x_1 a x_2 přibyla ještě neznámá z. Pro každou konkrétní hodnotu proměnné z obdržíme lineární rovnici o dvou neznámých, jejíž grafickým obrazem je přímka.

A jaký mají vztah jednotlivé přímky příslušející k různým hodnotám z? Jedná se o přímky se stejnou hodnotou směrnice, ale různými hodnotami koeficientu posunutí. Z toho vyplývá, že se jedná o rovnoběžné přímky. Grafickým znázorněním účelové funkce úlohy LP je tedy soustava rovnoběžných přímek. Tyto přímky se se vzrůstajícím z posouvají na jednu stranu, naopak s klesajícím z se posouvají na druhou stranu.

Při optimalizaci účelové funkce úlohy LP tedy hledáme takové body, které zároveň leží v množině přípustných řešení a zároveň leží na té z rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci, která náleží k optimálnímu (maximálnímu, či minimálnímu) z.

1.5. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná a optimální řešení následující



Obrázek 1.3: Prázdná množina přípustných řešení

úlohy LP.

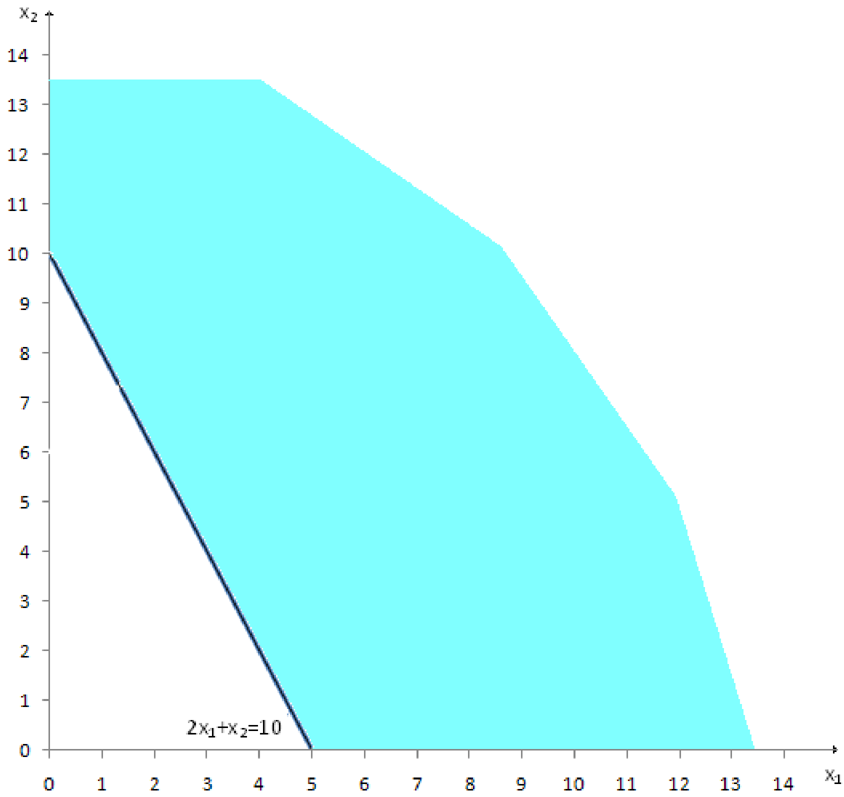
$$
\begin{aligned}
z &= x_1 + 3x_2 \ldots \max \\
2x_1 + x_2 &\geq 10 \\
x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\
-x_1 + x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Řešení: Na začátku si musíme uvědomit, co znamenají podmínky nezápornosti. Obě proměnné musí být nezáporné a proto je množina přípustných řešení omezena pouze na I. kvadrant.

Nejdříve sestrojíme přímku náležející k rovnici vzniklé z první nerovnice, a to $2x_1 + x_2 = 10$. Tato přímka je dána dvěma body. Každý z nich získáme zvolením libovolné hodnoty za jednu z proměnných a dosazením této hodnoty do rovnice dopočítáme hodnotu druhé proměnné. Například volbou $x_1 = 0$ dopočítáme $x_2 = 10$ a volbou $x_2 = 0$ dopočítáme $x_1 = 5$. Tedy daná přímka je dána dvěma body [0; 10] a [5; 0].

Dále zjistíme, která ze dvou polorovin vzniklých sestrojenou přímkou odpovídá zadané nerovnici. Toto provedeme tak, že zvolíme libovolný bod, který neleží na této přímce. Ověříme, zda je splněna zadaná nerovnice při dosazení souřadnic zvoleného bodu. Zvolíme-li bod [0; 0] a dosadíme jeho souřadnice do nerovnice, dostáváme vztah $2 \cdot 0 + 0 < 10$. Zadaná nerovnice není splněna a nás bude zajímat polorovina neobsahující počátek.Vše je vidět na obrázku 1.4. Obdobným způsobem sestrojíme i polorovinu náležející druhé nerovnici. Na obrázku 1.5 je znázorněna situace po zapracování těchto prvních dvou nerovnic. Stejně sestrojíme i zbývající dvě nerovnice. Situace je postupně znázorněna na obrázcích 1.6 a 1.7. Nakonec zapracujeme i účelovou funkci. Uvědomme si, že pro různé hodnoty z, předpis účelové funkce značí lineární rovnici o dvou neznámých, jejímž grafickým obrazem je přímka. Dále si uvědomme, že jednotlivé přímky pro různé hodnoty z jsou vzájemně rovnoběžné.

Můžeme si ověřit, že přímky se posouvají jedním směrem při vzrůstající hodnotě z, a naopak druhým směrem se posouvají při klesající hodnotě z. Na obrázku 1.8 jsou přímky náležející k účelové funkci vyznačeny červeně. Při hledání optimálního řešení zadané úlohy budeme posouvat přímkami ve směru rostoucího z tak dlouho, dokud bude průnik dané přímky a množiny všech přípustných řešení neprázdný. Z obrázku 1.8 je vidět, že optimálním řešením je bod o souřadnicích [2,4; 8,4], který je vyznačen červenýn puntíkem. Optimální hodnota účelové funkce je 27,4.



Obrázek 1.4: Polorovina odpovídající první nerovnici příkladu 1.5

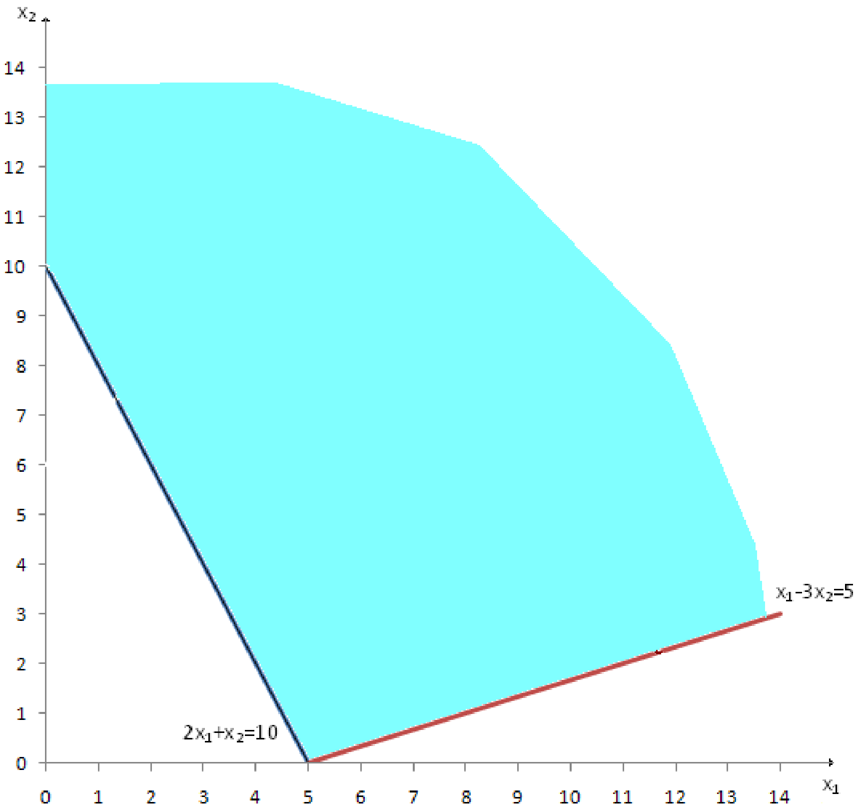
1.6. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná a optimální řešení následující úlohy LP.

$$
\begin{aligned}
z &= 2x_1 + 2x_2 \ldots \max \\
3x_1 + x_2 &\geq 6 \\
-3x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1 - x_2 &\leq 2 \\
x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Řešení: Opět si můžeme uvědomit, že podmínky nezápornosti znamenají, že je množina přípustných řešení omezena pouze na I. kvadrant.

Nejdříve sestrojíme přímku náležející k rovnici vzniklé z první nerovnice, a to $3x_1 + x_2 = 6$. Tato přímka je dána dvěma body. Každý z nich získáme zvolením libovolné hodnoty za jednu z proměnných a dosazením této hodnoty do rovnice dopočítáme hodnotu druhé proměnné. Například volbou $x_1 = 0$ dopočítáme $x_2 = 6$ a volbou $x_2 = 0$ dopočítáme $x_1 = 2$. Tedy daná přímka je dána dvěma body [0; 6] a [2; 0].

Dále zjistíme, která ze dvou polorovin vzniklých sestrojenou přímkou odpovídá zadané nerovnici. Toto provedeme tak, že zvolíme libovolný bod, který neleží na této přímce. Ověříme, zda je splněna zadaná nerovnice při dosazení souřadnic zvoleného bodu. Zvolíme-li bod [0; 0] a dosadíme jeho souřadnice do nerovnice, dostáváme vztah $3 \cdot 0 + 0 < 6$. Zadaná nerovnice není splněna a nás bude zajímat polorovina neobsahující počátek.Vše je vidět na obrázku 1.9. Obdobným způsobem sestrojíme i polorovinu náležející druhé nerovnici. Na obrázku 1.10 je znázorněna situace po zapracování těchto prvních dvou nerovnic.



Obrázek 1.5: Situace odpovídající prvním dvěma nerovnicím příkladu 1.5

Stejně sestrojíme i zbývající dvě nerovnice. Situace je postupně znázorněna na obrázcích 1.11 a 1.12.

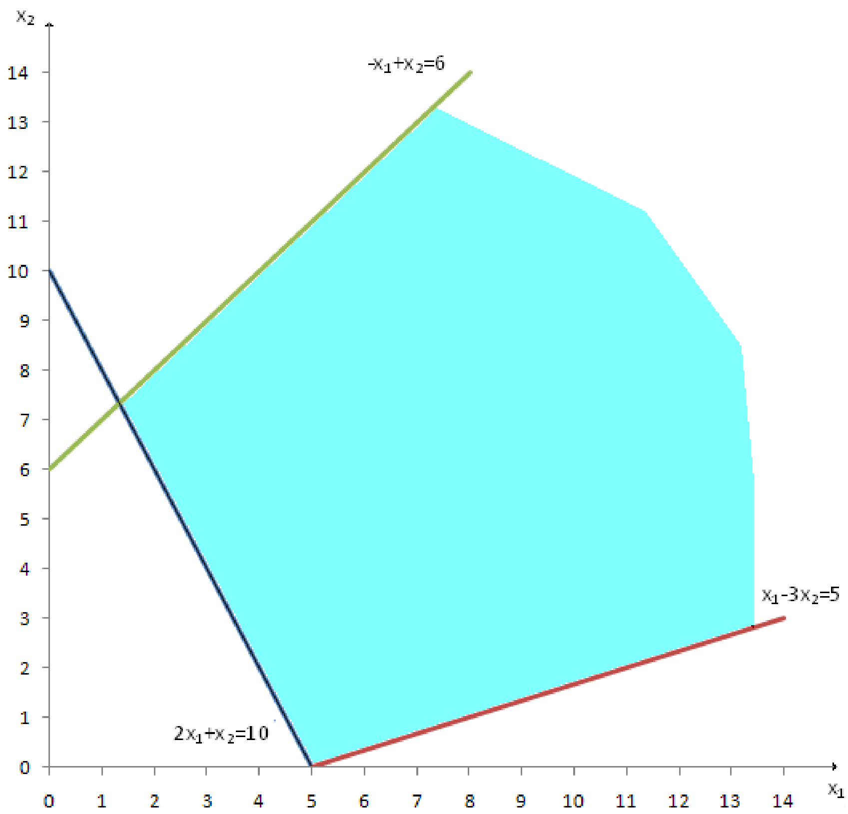
Nakonec zapracujeme i účelovou funkci. Na obrázku 1.13 jsou přímky náležející k účelové funkci vyznačeny červeně. Šipkou je znázorněn směr vzrůstající hodnoty z. Při hledání optimálního řešení zadané úlohy posouváme přímkami ve směru rostoucího z stále, pokud je průnik dané přímky a množiny všech přípustných řešení neprázdný. Z 1.13 je vidět, že můžeme přímkami posouvat stále dál a dál, což znamená, že optimální (tj. maximální) hodnotu nikdy nenalezneme, protože žádná taková neexistuje. Účelová funkce není na množině všech přípustných řešení shora omezená.

1.7. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná a optimální řešení následující úlohy LP.

$$
\begin{aligned}
z &= 2x_1 - 2x_2 \ldots \min \\
2x_1 + x_2 &\geq 10 \\
x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\
-x_1 + x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Řešení: Můžeme si všimnout, že vlastní podmínky této úlohy jsou totožné s vlastními podmínkami úlohy LP z příkladu 1.5. Proto i množina všech přípustných řešení bude totožná (viz obrázek 1.7).

Stačí nám tedy sestrojit soustavu rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci.



Obrázek 1.6: Situace odpovídající prvním třem nerovnicím příkladu 1.5

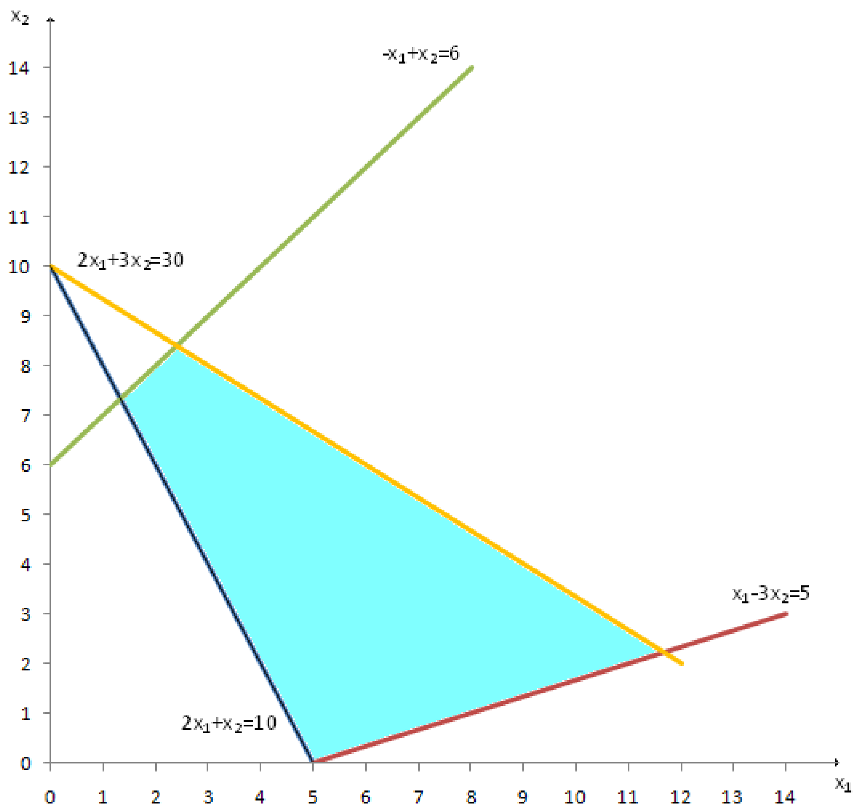
Přímka náležející hodnotě účelové funkce $z = 0$ je dána například body [0, 0] a [2, 2]. Přímka náležející hodnotě účelové funkce $z = 2$ je dána například body [2, 0] a [4, 2]. Na obrázku 1.14 jsou přímky znázorněny červeně a směr optimalizace (tj. minimalizace) je vyznačen šipkou. Vidíme, že přímkami náležejícími k účelové funkci můžeme posouvat směrem daným šipkou až do okamžiku, kdy bude jedna z těchto přímek obsahovat stranu AB čtyřúhelníku znázorňujícího množinu všech přípustných řešení. To znamená, že celá tato úsečka představuje množinu optimálních řešení dané úlohy LP. Tato úsečka obsahuje nekonečně mnoho bodů, což znamená, že daná úloha má nekonečně mnoho optimálních přípustných řešení. Ale součástí úsečky jsou dva krajové body, a to A a B. Tyto body představují optimální základní řešení. Souřadnice těchto bodů jsou A = [$\frac{4}{3}$; $\frac{22}{3}$], B = [2,4; 8,4]. Můžeme si lehce ověřit, že hodnota účelové funkce je v obou případech rovna -12.

1.8. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná, základní a optimální řešení úlohy LP popsané v příkladu 1.1.

Řešení: Připomeňme si matematický tvar této úlohy.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 2x_2 \dots \max \\ 3x_1 + 1x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 11 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nyní si nejprve pro každé vlastní omezení sestrojíme přímku, která je grafickým obrazem příslušné rovnice. Víme, že přímka je dána dvěma body, proto každou z přímek sestrojíme tak, že si vypočítáme libovolné dva body přímky a ty poté spojíme.



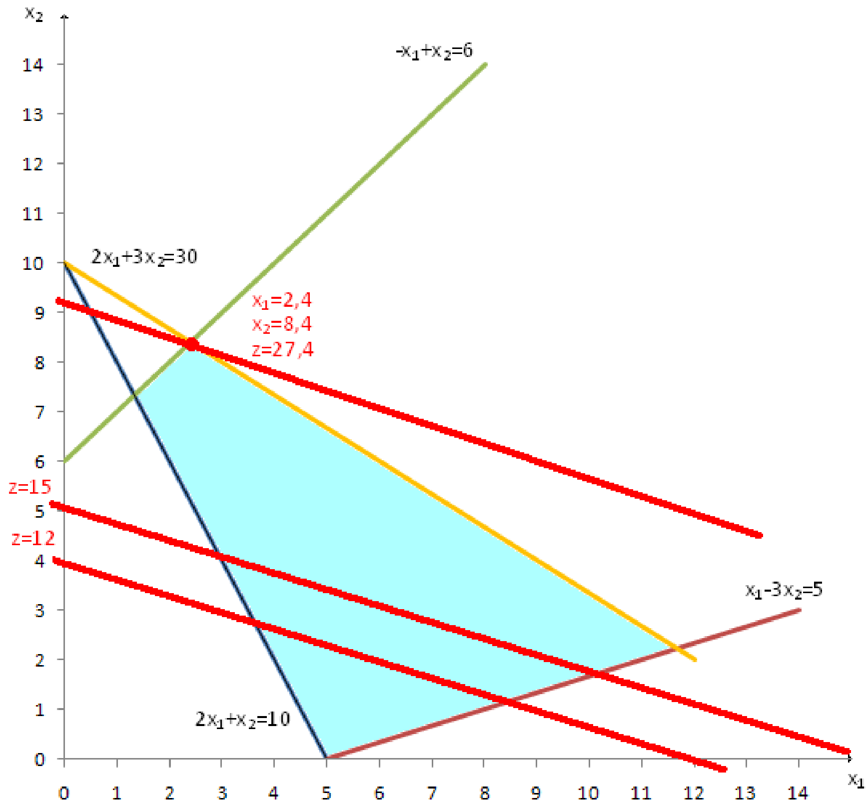
Obrázek 1.7: Množina všech přípustných řešení příkladu 1.5

V případě prvního vlastního omezení si při volbě $x_1 = 0$ dopočítáme
$x_2 = 6 - 3 \cdot 0 = 6$ a máme bod o souřadnicích [0, 6].
Dále při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme
$x_1 = \frac{6-1\cdot 0}{3} = 2$ a máme bod o souřadnicích [2, 0].
V případě druhého vlastního omezení si při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme
$x_1 = \frac{11-3\cdot 0}{2} = 5,5$ a máme bod o souřadnicích [5,5; 0].
Dále při volbě $x_1 = 1$ dopočítáme
$x_2 = 6 - 3 \cdot 1 = 3$ a máme bod o souřadnicích [1, 3].
Volba $x_1 = 0$ v tomto případě není příliš vhodná, protože po dosazení dostáváme
$x_2 = \frac{11-2\cdot 0}{3} = \frac{11}{3}$, což je hodnota, která se graficky znázorňuje obtížně.

Poté si uvědomíme, která z takto vzniklých dvou polorovin odpovídá naší nerovnici. To zjistíme tak, že vybereme libovolný bod roviny, který neleží na zobrazené přímce a jeho souřadnice dosadíme do sledované nerovnice. Pokud je splněna daná nerovnost, vybereme polorovinu obsahující tento bod. Pokud daná nerovnost splněna není, vybereme polorovinu opačnou.

Z výpočetních důvodů je pohodlné, stejně jako v předchozích příkladech, volit za tento bod počátek souřadnic, tedy bod o souřadnicích [0, 0] ovšem pouze v případě, pokud přímka neprochází počátkem.
V případě prvního vlastního omezení vidíme, že po dosazení $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ obdržíme nerovnost
$3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 6$,
která je zjevně splněna, proto vybereme polorovinu obsahující počátek.
V případě druhého vlastního omezení vidíme, že po dosazení $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ obdržíme nerovnost
$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 11$,
která je zjevně splněna, proto opět vybereme polorovinu obsahující počátek.

Dále si musíme opět uvědomit, co znamenají podmínky nezápornosti. Obě proměnné



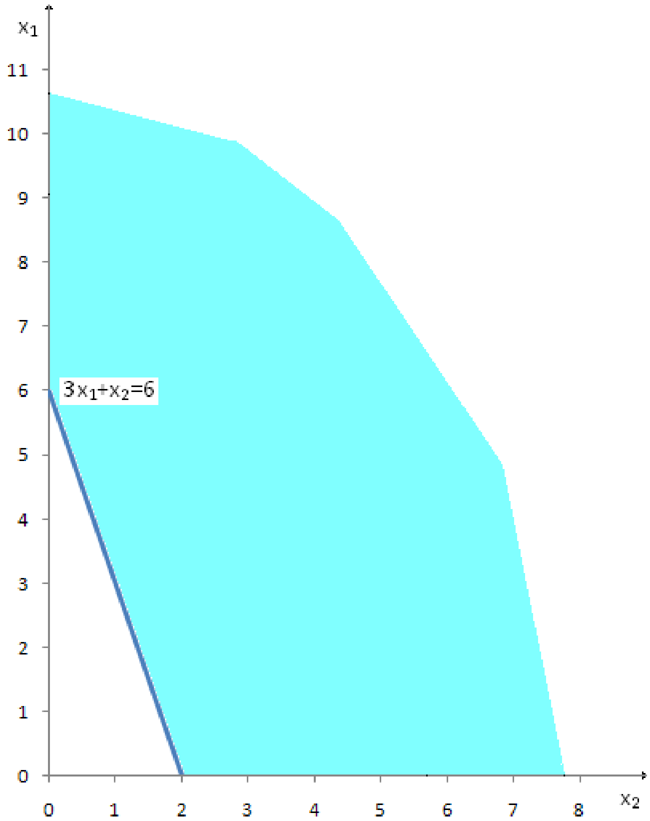
Obrázek 1.8: Výsledné grafické řešení příkladu 1.5

musí být nezáporné a proto je množina přípustných řešení omezena pouze na I. kvadrant.

Výsledek je zřejmý z obrázku 1.15. Množina přípustných řešení je vybarvený čtyřúhelník ABCD.
Množinou všech základních řešení je množina vrcholů tohoto čtyřúhelníku, tj. čtyřprvková množina $\{$A, B, C, D$\}$.

V dalším kroku vytvoříme soustavu rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci. K dobrému vyhodnocení postačí, pokud sestrojíme dvě takovéto přímky. Zvolíme tedy libovolně dvě různé hodnoty z a sestrojíme příslušné přímky.

Například pro volbu $z = 4$ obdržíme následující předpis pro přímku:
$4 = 2x_1 + 2x_2$.
Tuto přímku sestrojíme obdobně jako předchozí přímky, a to volbou dvou bodů. V tomto případě při volbě $x_1 = 0$ dopočítáme
$x_2 = \frac{4-2\cdot 0}{2} = 2$
a při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme
$x_1 = \frac{4-2\cdot 0}{2} = 2$.
Máme tedy body [0, 2] a [2, 0] a ty spojíme.
Obdobně pro volbu $z = 6$ obdržíme následující předpis pro přímku:
$6 = 2x_1 + 2x_2$.
I tuto přímku sestrojíme stejným postupem. V tomto případě při volbě $x_1 = 0$ dopočítáme
$x_2 = \frac{6-2\cdot 0}{2} = 3$
a při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme
$x_1 = \frac{6-2\cdot 0}{2} = 3$.
Máme tedy body [0, 3] a [3, 0] a ty spojíme.
Výsledek je zřejmý z obrázku 1.16. Soustava rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci je znázorněna pomocí dvou červených přímek. Je zřejmé, že hodnota z narůstá z leva do prava. Na obrázku je znázorněno šipkou. Budeme-li posunovat rov-



Obrázek 1.9: Polorovina odpovídající první nerovnici příkladu 1.6

noběžky ve vyznačeném směru tak dlouho, dokud bude mít tato přímka nějaký společný bod s množinou všech přípustných řešení, tedy do doby, než se dostaneme na hranici této množiny. V našem případě se budeme posunovat tak dlouho, až se jedna z rovnoběžek dotkne bodu B. Tento bod je zároveň bodem množiny všech přípustných řešení a zároveň leží na jedné z rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci, a to na té, která má dle možností největší hodnotu z. Proto bod B = [1, 3] odpovídá hledanému maximu, tedy $x_1 = 0$ a $x_1 = 0$ jsou hodnoty našich neznámých, které odpovídají všem omezením úlohy a přitom maximalizují hodnotu účelové funkce. Maximální hodnotu účelové funkce dopočítáme dosazením obou proměnných do předpisu pro účelovou funkci
$z = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$.

Zjistili jsme tedy, že pokud chceme maximalizovat tržby, musíme vyrobit jeden výrobek V1 a tři výrobky V2. Tržby v tomto případě budou 8 tisíc korun.

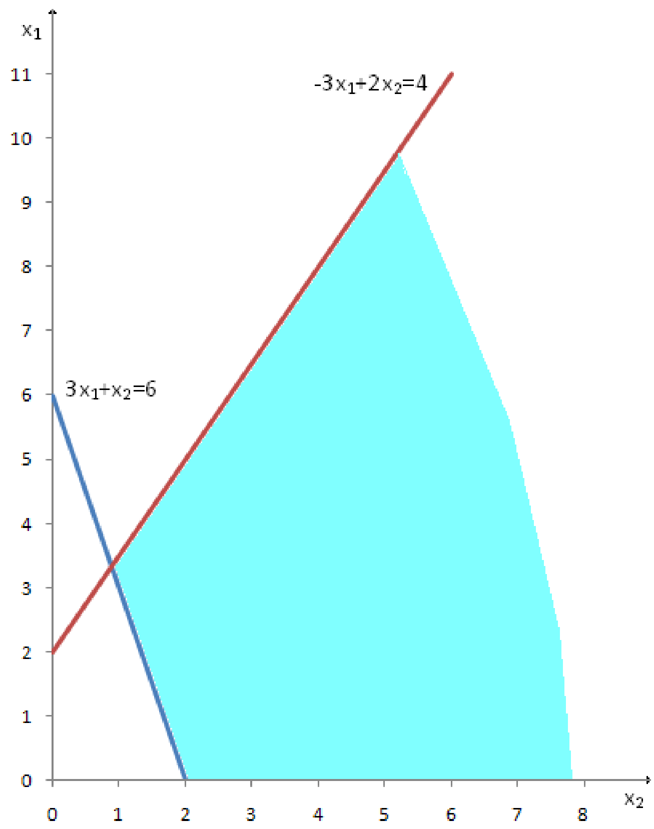
1.4 Simplexová metoda

Simplexová metoda (SM) je základní metodou používanou při řešení úloh lineárního programování. Její princip je postaven na Základní větě lineárního programování, neboli na faktu, že pokud úloha LP má nějaké optimální řešení, pak alespoň jedno z těchto řešení nalezneme i mezi řešeními základními. Proto SM může hledat optimální řešení pouze mezi základními.

Základních řešení, jak už jsme si uvedli, je konečně mnoho. Prochází-li SM pouze tato řešení, je jisté, že pokud nějaké optimální řešení existuje, pak jej metoda nalezne po konečně mnoha krocích.

Simplexová metoda se řadí mezi tzv. iterační algoritmy. To znamená, že v postupu nejprve nalezneme nějaké počáteční přípustné řešení, které se poté snažíme vylepšovat.

Pro postup je výchozím tvarem matematického modelu tzv. **kanonický tvar** úlohy.



Obrázek 1.10: Situace odpovídající prvním dvěma nerovnicím příkladu 1.6

Přičemž řekneme, že matematický model úlohy LP se nachází v kanonockém tvaru, pokud platí následující podmínky:

- vlastní omezení jsou vyjádřena jako soustava lineárních rovnic,
- pravé strany všech těchto rovnic jsou nezáporná čísla,
- matice soustavy obsahuje jednotkovou submatici řádu *m* (počtu rovnic),
- pro všechny proměnné úlohy jsou splněny podmínky nezápornosti,
- jedná se o maximalizační úlohu.

Nejjednodušší je převod na kanonický tvar u úloh LP, jejímž cílem je maximalizace účelové funkce, jsou splněny všechny podmínky nezápornosti a všechna vlastní omezení jsou nerovnice typu ”$\leq$”.

V tomto případě totiž převodem nerovnic na rovnice vznikne jednotková submatice, neboť při převodu nerovnice typu na rovnici přidáváme speciální proměnnou, která představuje jakýsi ”zbytek”. Tato proměnná se v ostatních rovnicích nevyskytuje, neboli jinými slovy se vyskytuje s koeficientem 0.

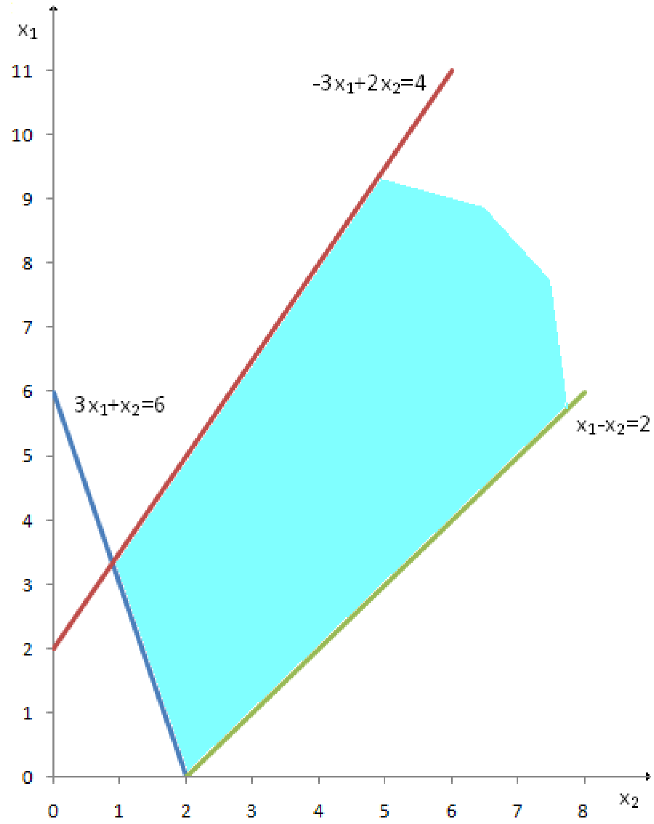
Tuto ”ideální”úlohu LP můžeme tedy shrnout do následujícího matematického tvaru:
Nalézt maximum lineární funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.10}$$

za splnění podmínek

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \tag{1.11}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$



Obrázek 1.11: Situace odpovídající prvním třem nerovnicím příkladu 1.6

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \tag{1.12}$$

A úlohu tohoto typu převedeme na následující kanonický tvar:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \ldots \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 1x_{n+m} = b_m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n + m$$

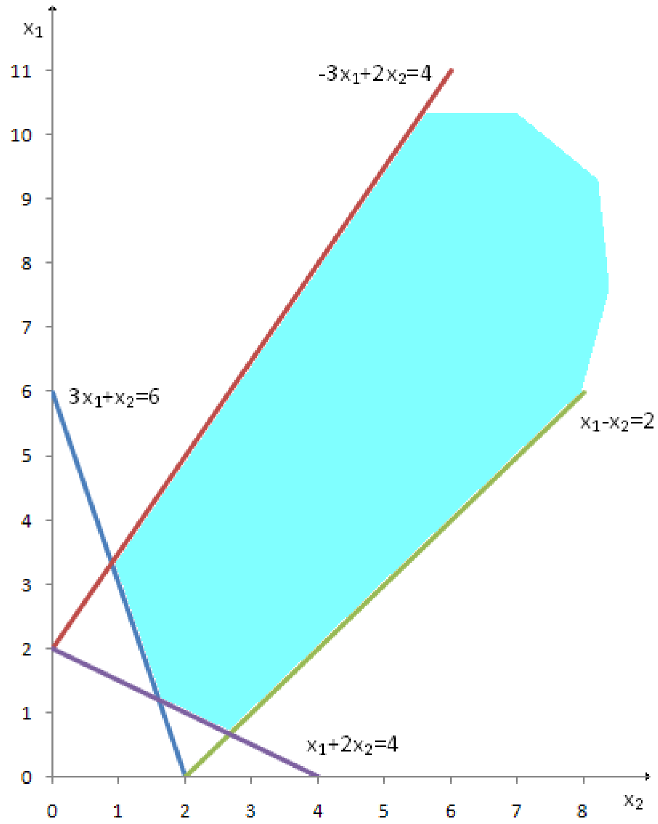
Někdy se do kanonického tvaru zapracovává i účelová funkce, a to úpravou na rovnici následujícího tvaru:

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n = 0$$

při označení $c_i = a_{0i}$ můžeme psát následovně:

$$-a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - ... - a_{0n}x_n + 0x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m} + z = 0$$

což při vědomí, že z je další z proměnných, stylem odpovídá zápisu podmínek vlastního omezení.



Obrázek 1.12: Množina všech přípustných řešení příkladu 1.6

Kanonický tvar je mimo jiné výhodný pro nalezení počátečního základního řešení. Opět si uvědomíme, že základní řešení je takové přípustné řešení, které má přesně tolik nul, jako je rozdíl počtu neznámých a počtu (lineárně nezávislých) rovnic. V našem případě tedy budeme mít v základním řešení $(n+m)-m = n$ nul. Jedním ze základních řešení je i takové, ve kterém se za nuly zvolí všechny strukturální proměnné, tj. $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

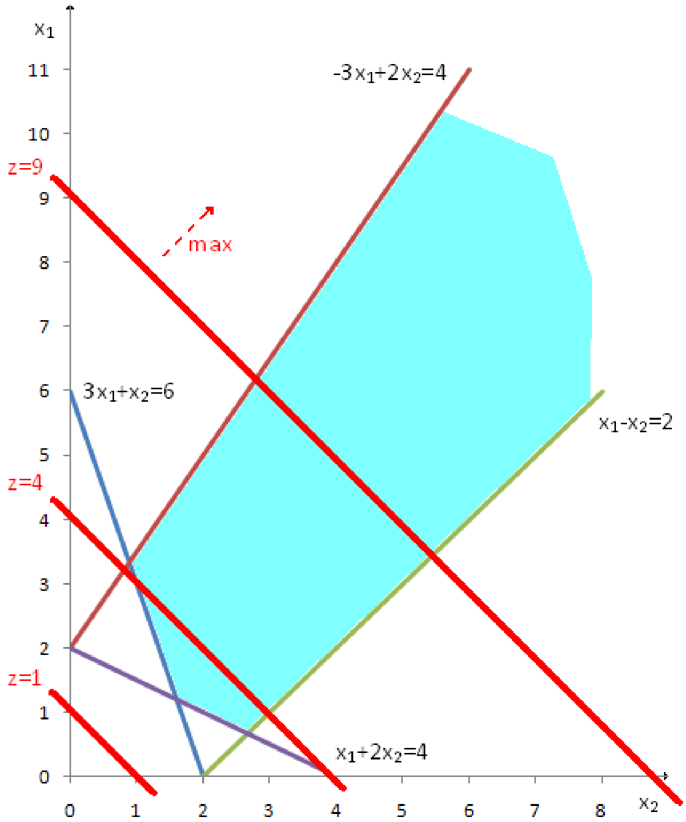
Po dosazení těchto nul do rovnic můžeme dopočítat hodnoty zbývajících proměnných, a to $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2$, ..., $x_{n+m} = b_m$. Zřejmě se jedná o přípustné řešení, protože odpovídá všem podmínkám vlastního omezení a všechny proměnné jsou nezáporné.

1.9. Vytvořte kanonický tvar a nalezněte výchozí řešení následující úlohy LP.

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \dots \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \end{aligned}$$

Řešení: Úloha je maximalizační, tedy jedna z podmínek kanonického tvaru je splněna automaticky. Pro splnění ostatních podmínek musíme všechny nerovnice upravit na rovnice, a to přidáním nových proměnných. V případě znaménka nerovnice $\leq$ tuto přidanou proměnnou budeme přičítat. Zároveň připíšeme do všech rovnic proměnné, které se v dané rovnici nevyskytují, s koeficientem 0. Dostaneme tedy následující sou-



Obrázek 1.13: Výsledné grafické řešení příkladu 1.6

stavu rovnic:

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 5\\
2x_1 - 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 2\\
3x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 &= 4\\
1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 &= 6
\end{aligned}$$

Nyní si můžeme všimnout, že matice této soustavy rovnic obsahuje jednotkovou submatici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nakonec ještě můžeme přidat rovnici náležející účelové funkci, a to:

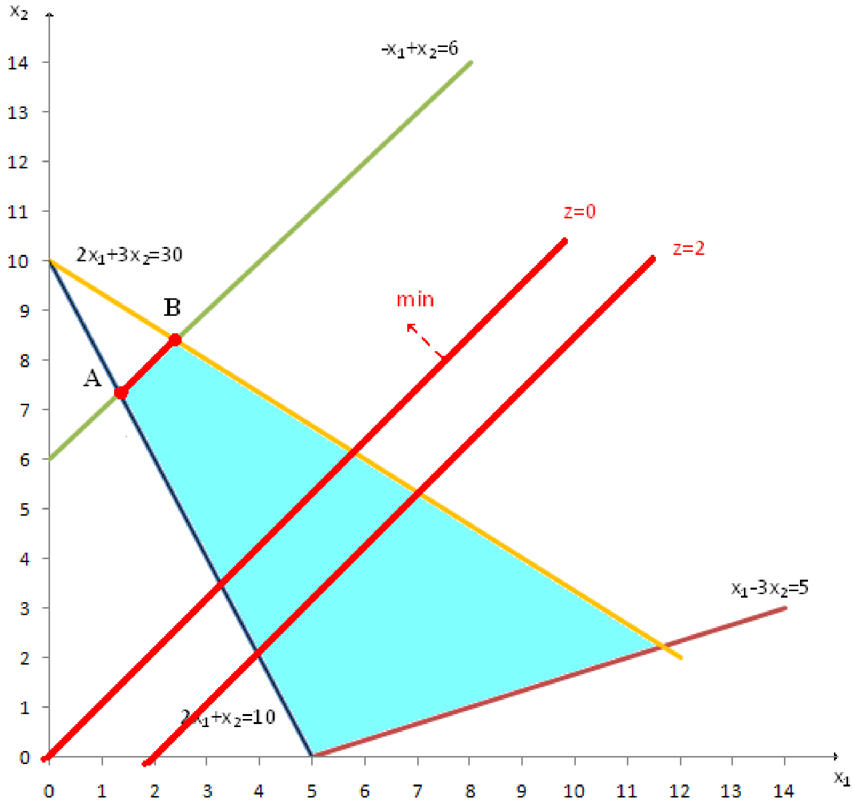
$$-1z - 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0$$

je zřejmé, že pro všechny uvedené proměnné platí podmínky nezápornosti, tedy:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Tím jsme úlohu převedli do kanonického tvaru.
Při hledání výchozího řešení této úlohy položíme všechny nebazické proměnné, tj. proměnné, které nenáležejí k jednotkové submatici, rovny 0. Tedy:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$



Obrázek 1.14: Výsledné grafické řešení příkladu 1.7

Dosazením těchto hodnot do soustavy rovnic kanonického tvaru můžeme ověřit, že hodnoty zbývajících proměnných nabývají jednotlivých hodnot pravých stran rovnic.

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 5 \\
2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 2 \\
3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 &= 4 \\
1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 &= 6
\end{aligned}
$$

a tedy

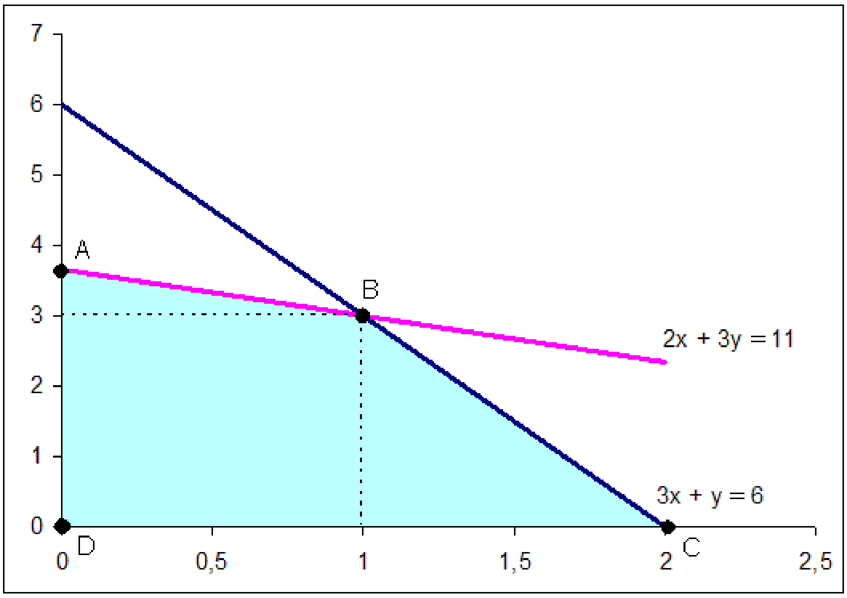
$$x_4 = 5, x_5 = 2, x_6 = 4, x_7 = 6.$$

Výchozím základním řešením je tedy vektor $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 5, 2, 4, 6)$.

Pokud není úloha LP v uvedeném tvaru, který je ideální k převodu na kanonický tvar, budeme postupovat následovně:

- Pokud není splněna podmínka, že se jedná se o maximalizační úlohu, ale o úlohu minimalizační, pak účelovou funkci vynásobíme (-1) a tím minimalizační úlohu převedeme na úlohu maximalizační. Je totiž zřejmé, že původní účelová funkce nabývá minima pro stejné hodnoty proměnných x, pro které nabývá maxima upravená účelová funkce. Dále platí, že výsledná optimální hodnota z obou funkcí je stejná až na znaménko. Vše je názorně vidět na obrázku 1.17.

- Pokud není splněna podmínka, že pravé strany všech podmínek vlastního omezení jsou nezáporná čísla, pak danou rovnici či nerovnici vynásobíme (-1). Po této úpravě již bude pravá strana daného vlastního omezení zřejmě nezáporná.



Obrázek 1.15: Množina přípustných řešení příkladu 1.1

- Pokud není splněna podmínka, že matice soustavy obsahuje jednotkovou submatici řádu *m* (počtu rovnic), pak do soustavy přidáme další proměnnou, jejíž koeficienty z jednotlivých rovnic vytváří takový vektor obsahující jednu jedničku a ostatní nuly, jaký sloupec chybí v jednotkové submatici.
- Pokud není splněna podmínka, že pro všechny proměnné úlohy jsou splněny podmínky nezápornosti, pak tu proměnnou, pro kterou podmínka nezápornosti splněna není, rozdělíme na dvě nezáporné proměnné, a to následujícím způsobem. $x_i = x_i^+ - x_i^-$, přičemž pro proměnné x_i^+ a x_i^- platí následující:
  - Pokud $x_i \geq 0$, pak $x_i^+ = x_i$ a $x_i^- = 0$.
  - Pokud $x_i < 0$, pak $x_i^+ = 0$ a $x_i^- = x_i$.

Strukturální proměnná

Proměnné, které do úlohy vstupují přímo ze slovního zadání a jenž odpovídají skutečným činnostem nazýváme strukturálními (či strukturními) proměnnými.

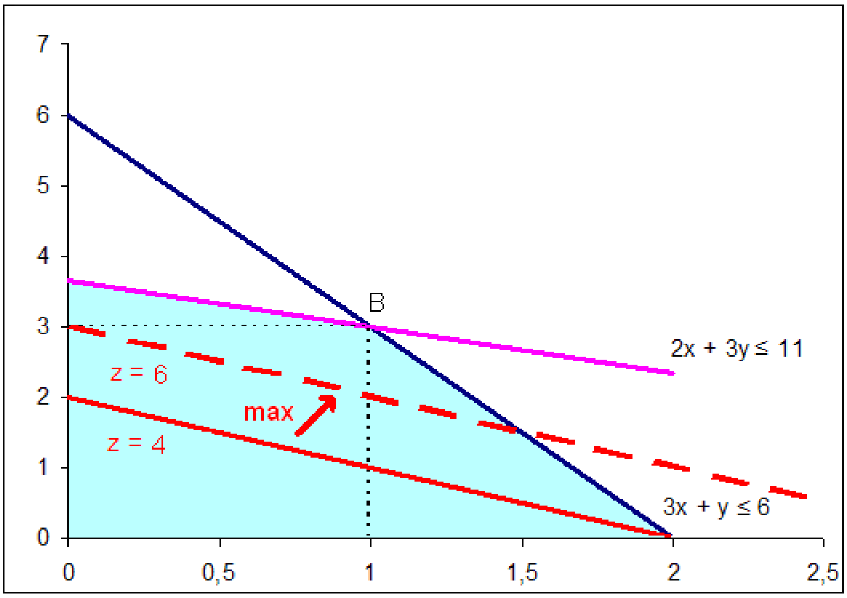
Přídatná proměnná

Proměnné, které do úlohy přidáváme při úpravě nerovnic na rovnice nazýváme přídatnými proměnnými.

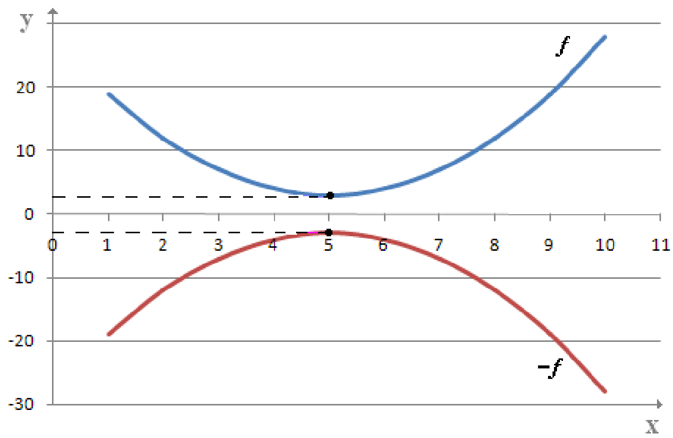
Tyto proměnné lze interpretovat. Ve většině úloh vyjadřují jakýsi zbytek, či naopak přebytek v jednotlivých podmínkách vlastního omezení.

Pomocná proměnná

Proměnné, které do úlohy přidáváme v případě chybějících sloupců jednotkové submatice nazýváme pomocnými proměnnými.



Obrázek 1.16: Optimalizační proces v rámci příkladu 1.1



Obrázek 1.17: Převod hledání minima funkce na hledání maxima funkce

Tyto proměnné nelze interpretovat, v úloze jsou "na víc", je nutno je odstranit, jinými slovy řečeno vynulovat. Toto můžeme dělat dvěma způsoby.

Jedním z těchto způsobů je přiřazení "handicapových"koeficientů těmto pomocným proměnným v účelové funkci. Pokud máme maximalizační úlohu, přiřadíme pomocným proměnným záporný koeficient, který má v absolutní hodnotě velkou hodnotu. Tím bude z hlediska maximalizace nevýhodné mít pomocnou proměnnou s jinou než nulovou hodnotou. Obdobně při minimalizační úloze přiřadíme pomocným proměnným hodně velký kladný koeficient. Jediným závažným nedostatkem tohoto způsobu je fakt, že nelze předem zcela bezpečně odhadnout, zda jsme zvolili koeficient "dostatečně handicapující". Z tohoto důvodu při řešení neodlišíme případ, kdy daná úloha LP nemá žádné přípustné řešení, od případu, kdy jsme nevhodně zvolili handicapový koeficient.

Druhým způsobem je použití speciálního typu simplexové metody, tzv. dvoufázové simplexové metody, která nejprve v první fázi vynuluje všechny pomocné proměnné pomocí optimalizace speciální pomocné účelové funkce, v druhé fázi pak teprve hledá požadované optimum. Tento způsob bezpečně odhalí případ, kdy úloha LP nemá žádné přípustné řešení. Je to však způsob poněkud pracný. V tomto materiálu se touto metodou zabývat blíže nebudeme.

Strukturální proměnné se téměř vždy vyskytují v účelové funkci s nenulovými cenovými koeficienty, přídatné a pomocné proměnné se v účelové funkci nevyskytují, jinými slovy se v účelové funkci vyskytují s nulovými koeficienty.

1.10. Vytvořte kanonický tvar, určete typy proměnných a nalezněte výchozí řešení následující úlohy LP.

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \dots \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq -6 \end{aligned}$$

Řešení: Úloha je minimalizační, proto musíme provést úpravu účelové funkce, a to vynásobením (-1). Upravená účelová funkce bude mít následující tvar:

$$z' = -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 \dots \max$$

Pro splnění ostatních podmínek si musíme nejdříve uvědomit, že v kanonockém tvaru musí být pravé strany podmínek všech vlastních omezení nezáporné. Toto není splněno u poslední podmínky. Proto tuto nerovnici musíme vynásobit (-1). A tím obdržíme následující nerovnici:

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq 6$$

Dále musíme všechny nerovnice upravit na rovnice, a to přidáním nových proměnných. V případě znaménka nerovnice $\leq$ tuto přidanou proměnnou budeme přičítat a v případě znaménka nerovnice $\geq$ tuto přidanou proměnnou budeme odečítat. Zároveň připíšeme do všech rovnic proměnné, které se v dané rovnici nevyskytují, s koeficientem 0. Dostaneme tedy následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 2 \\ 3x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 &= 4 \\ -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Pokud si vypíšeme matici této soustavy,

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

můžeme si lehce všimnout, že z potřebné jednotkové submatice chybí dva sloupce, vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

To znamená, že v uvedené soustavě rovnic chybí proměnná, která má ve druhé rovnici koeficient 1 a ve všech ostatních rovnicích koeficient 0. Obdobně chybí proměnná, která má ve třetí rovnici koeficient 1 a ve všech ostatních rovnicích koeficient 0. To znamená, že matice této soustavy by neobsahovala jednotkovou submatici. Proto je nutno přidat dvě další proměnné. Z důvodu, že tyto proměnné mají poněkud jiný charakter než ostatní proměnné v úloze, označíme je jiným písmenem. Výsledná soustava rovnic má tedy tvar:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1e_1 + 0e_2 &= 2 \\ 3x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0e_1 + 1e_2 &= 4 \\ -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 6 \end{aligned}$$

Nakonec ještě můžeme přidat rovnici náležející účelové funkci, a to:

$$-1z' + 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0e_1 + 0e_2 = 0$$

je zřejmé, že pro všechny uvedené proměnné platí podmínky nezápornosti, tedy:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, e_1, e_2 \geq 0$$

Tím jsme úlohu převedli do kanonického tvaru.
Nyní určíme typy jednotlivých proměnných.
Proměnné x_1, x_2, x_3 byly v úloze již v úvodním matematickém modelu, v účelové funkci jsou obsaženy s nenulovými cenovými koeficienty, jedná se tedy o strukturální proměnné.
Proměnné x_4, x_5, x_6 byly do úlohy přidány při převodu jednotlivých nerovnic na rovnice, jedná se tedy o proměnné přídatné.
Proměnné e_1, e_2 byly do úlohy přidány z důvodu, že pro existenci jednotkové submatice chyběly sloupce, které mají ve všech řádcích nuly, pouze v druhém (respektive třetím) řádku obsahují jedničku. Jedná se tedy o pomocné proměnné.
Při hledání výchozího řešení této úlohy položíme všechny proměnné, které nenáležejí k jednotkové submatici, rovny 0. Tedy:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$$

Dosazením těchto hodnot do soustavy rovnic kanonického tvaru můžeme ověřit, že hodnoty zbývajících proměnných nabývají jednotlivých hodnot pravých stran rovnic.

$$\begin{aligned}
1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 4\cdot 0 + 1x_4 + 0\cdot 0 + 0x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 5\\
2\cdot 0 - 4\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0x_4 + 0\cdot 0 + 0x_6 + 1e_1 + 0e_2 &= 2\\
3\cdot 0 + 1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0x_4 - 1\cdot 0 + 0x_6 + 0e_1 + 1e_2 &= 4\\
-1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 1\cdot 0 + 0x_4 + 0\cdot 0 + 1x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 6
\end{aligned}$$

a tedy

$$x_4 = 5, x_6 = 6, e_1 = 2, e_2 = 4.$$

Tím jsme nalezli výchozí řešení.

1.5 Algoritmus simplexové metody

Pokud máme již úlohu převedenu do kanonického tvaru, vytvoříme tzv. simplexovou tabulku, a to způsobem obdobným pro vytváření matice soustavy.
Základ této tabulky bude tvořen koeficienty jednotlivých rovnic kanonického tvaru tabulky.
Poslední řádek tabulky bude tvořen koeficienty doplňkové rovnice kanonického tvaru náležející účelové funkci.
Před takto vytvořenou tabulku předřadíme ještě dva řádky. První z nich bude obsahovat cenové koeficienty všech proměnných a druhý označení všech proměnných.
Dále před tabulku předřadíme dva sloupce, z nichž první bude obsahovat cenové koeficienty všech bazických proměnných a druhý označení těchto proměnných.

Vytvořme nyní simplexovou tabulku úlohy LP z příkladu 1.9

Takto bude vypadat tabulka bez předřazených dvou sloupců.

4	7	3	0	0	0	0	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	2	−4	1	0	0	0	5
2	−4	1	0	1	0	0	2
3	1	−2	0	0	1	0	4
1	1	1	0	0	0	1	6
−4	−7	−3	0	0	0	0	0

V tabulce jsme pro lepší přehlednost oddělili jednoduchou čarou poslední sloupec obsahující pravé strany rovnic kanonického tvaru úlohy, poslední řádek obsahující informace o účelové funkci a dále předřazené řádky dvojitou čarou.
Abychom mohli vyplnit předřazené sloupce, musíme určit všechny bazické proměnné, a tím proměnné, které budou přiřazeny k jednotlivým řádkům.
Jak již víme, bazické proměnné jsou ty z proměnných, které náleží k jednotlivým sloupcům jednotkové submatice. V našem případě jsou to proměnné x_4, x_5, x_6 a x_7. Jednotlivé bazické proměnné přiřadíme k tomu řádku, ve kterém se ve sloupci příslušném k této proměnné vyskytuje 1.
Výsledná tabulka bude mít tvar

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	1	2	-4	1	0	0	0	5
0	x_5	2	-4	1	0	1	0	0	2
0	x_6	3	1	-2	0	0	1	0	4
0	x_7	1	1	1	0	0	0	1	6
		-4	-7	-3	0	0	0	0	0

Jakmile máme sestavenu výchozí simplexovou tabulku můžeme přistoupit k vlastnímu zpracování.

Účelová funkce nabývá ve výchozím řešení (viz závěr příkladu 1.9) nulové hodnoty. Je pravděpodobné, že toto řešení není optimální. Ze základní věty LP víme, že můžeme hledat optimální řešení mezi základními řešeními. Budeme tedy hledat jiné základní řešení, pro které bude výsledná hodnota účelové funkce vyšší.

Budeme proto hledat proměnnou, která není v tomto okamžiku bazická, tj. je rovna nule, jejíž kladná hodnota by zvýšila hodnotu účelové funkce. Jak tuto proměnnou budeme hledat? Uvědomme si, jak vypadá účelová funkce

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

a jak vypadá řádek simplexové tabulky patřící účelové funkci.

	-4	-7	-3	0	0	0	0	0

Uvědomme si dále, že proměnné x_4 až x_7 jsou bazické, čili kladné a proměnné x_1,x_2 a x_3 jsou nebazické, čili nulové. A kdy bude odnulování dané nebazické proměnné výhodné z hlediska hledání maxima účelové funkce? Pouze v případě, že koeficient u dané proměnné bude kladný, tedy hodnota v příslušném sloupci posledního řádku simplexové tabulky bude záporná.

Pokud tedy shrneme své dosavadní poznatky, můžeme říci, že hodnotu účelové funkce můžeme vylepšit, pokud existuje v posledním řádku simplexové tabulky záporná hodnota.

Kriteriální řádek

Poslední, oddělený řádek simplexové tabulky obsahuje kritérium optimality aktuálního řešení úlohy LP, proto jej nazýváme kriteriálním řádkem.

Z předchozích úvah již tedy víme, jak poznáme, zda je či není dané řešení optimální. Ale jak se zachováme v případě, že víme, že aktuální řešení optimální není? Kterou z nebazických proměnných, kterým náleží v kriteriálním řádku záporná hodnota, máme vybrat?

Je pravděpodobné, že hodnota účelové funkce vzroste více, vybereme-li tu proměnnou, které náleží v kriteriálním řádku číslo, které je v absolutní hodnotě vyšší. Proto pro další postup zvolíme tu z nebazických proměnných, která má číslo v kriteriálním řádku v absolutní hodnotě nejvyšší.

Klíčový sloupec

Sloupec simplexové tabulky, ve kterém je číslo v kriteriálním řádku záporné a absolutní hodnota tohoto čísla je maximální z absolutních hodnot všech záporných čísel v tomto řádku, nazveme klíčovým sloupcem.

Výběrem klíčového sloupce jsme vybrali nebazickou proměnnou, která se v následujícím postupu stane bazickou. To znamená, že původně nulová proměnná se stane kladnou. Je ale přesně dán počet bazických proměnných. Pokud se tedy některá z nebazických proměnných má stát bazickou, musí se i jedna z bazických proměnných stát nebazickou. To znamená že se tato původně kladná proměnná vynuluje.

Jak vybereme tuto bazickou proměnnou? Jinými slovy, jak vybereme řádek simplexové tabulky, který náleží některé z bazických proměnných?

Připomeňme si, že hodnoty bazických proměnných aktuálního řešení vyčteme v posledním sloupci simplexové tabulky. Dále si připomeňme, že všechny proměnné přípustného řešení musí být nezáporné. Z těchto dvou faktů plyne, že nesmíme připustit, aby se v posledním sloupci simplexové tabulky vyskytly záporné hodnoty.

Pokud má jedna z nebazických proměnných v bazi vystřídat jednu z bazických, musí ”podědit”její sloupec z jednotkové submatice. Toto provedeme pomocí povolených operací Gaussovy metody pro řešení soustav lineárních rovnic (podrobněji bylo popsáno v kapitole o lineární algebře - řešení soustav rovnic). Tedy vybraný řádek, ve kterém má být hodnota 1, vydělíme číslem, které je v tomto řádku umístěno v klíčovém sloupci. Ostatní řádky, ve kterých mají být nuly, upravíme tak, že od nich odečteme vhodný násobek dříve vybraného řádku.

Při těchto úpravách však nesmí v posledním sloupci tabulky vzniknout záporné hodnoty. Jak to zařídíme? Vybereme ten řádek, který má nejmenší kladný podíl, který vznikne vydělením hodnoty v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci.

Klíčový řádek

Řádek simplexové tabulky, ve kterém je nejmenší kladný podíl, který vznikne vydělením hodnoty v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci, nazveme klíčovým řádkem.

Jak tedy bude vypadat výběr klíčového sloupce a řádku v našem případu? Podíváme se do kriteriálního tj. posledního (v tabulce vyznačen tučně) řádku a vybereme to záporné číslo, které je v absolutní hodnotě maximální (v tabulce vyznačeno červeně).

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	1	2	-4	1	0	0	0	5
0	x_5	2	-4	1	0	1	0	0	2
0	x_6	3	1	-2	0	0	1	0	4
0	x_7	1	1	1	0	0	0	1	6
		-4	**-7**	**-3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Klíčovým sloupcem je tedy sloupec náležející proměnné x_2.
Pro hledání klíčového řádku musíme nejprve vypočítat v každém řádku podíl hodnoty v sloupci pravých stran, tj. posledním pravém sloupci. Tyto podíly si poznamenáme do přidaného pomocného sloupce na pravý okraj tabulky.

		4	7	3	0	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	x_4	1	**2**	-4	1	0	0	0	5	$2,5$
0	x_5	2	-4	1	0	1	0	0	2	$-0,5$
0	x_6	3	1	-2	0	0	1	0	4	4
0	x_7	1	1	1	0	0	0	1	6	6
		-4	-7	-3	0	0	0	0	0	

Klíčovým řádkem bude první řádek náležející bazické proměnné x_4. Z výběru klíčového sloupce a řádku vyplývá, že v bázi vymění nebazická proměnná x_2 bazickou proměnnou x_4. Prakticky toto značí, že proměnná x_2, která v dosavadním řešení nabývala nulové hodnoty, bude mít v novém řešení nějakou kladnou hodnotu. Naopak proměnná x_4, která byla doposud nenulová, bude v novém řešení nulová. Nové řešení zjistíme převedením tabulky do nového tvaru pomocí povolených operací.

V novém tvaru simplexové tabulky bude sloupec náležející proměnné x_2 obsahovat samé nuly, pouze na pozici klíčového řádku jedničku. Toto provedeme tak, že nejprve vydělíme celý klíčový řádek hodnotou klíčového prvku (tj. čísla, které se nachází na průniku klíčového sloupce a klíčového řádku), v našem případě budeme celý klíčový řádek dělit číslem 2.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$

K ostatním řádkům budeme vždy přičítat takový násobek klíčového řádku, aby výsledná hodnota na pozici upravovaného řádku a klíčového sloupce byla nulová.

K druhému řádku přičteme dvojnásobek řádku klíčového.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12

Od třetího řádku odečteme polovinu klíčového řádku.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$

Od čtvrtého řádku opět odečteme polovinu klíčového řádku.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$

Nakonec upravíme i kriteriální řádek. Opět tak, aby na pozici klíčového sloupce byla v nově vzniklém kriteriálním řádku nula.
Při úpravě kriteriálního řádku si můžeme vybrat ze dvou způsobů.

1. Stejným způsobem jako předchozí řádky, tj. odečteme od něj vhodný násobek klíčového řádku.

2. Vypočítáme skalární součin vektoru cen bazických proměnných (tj. první předřazený sloupec) a vektoru umístěného v tom sloupci, v němž počítáme hodnotu v kriteriálním řádku. Od výsledné hodnoty následně odečteme hodnotu cenového koeficientu dané proměnné (tj. číslo uvedené v daném sloupci v prvním předřazeném řádku).

Pokud chceme využít první způsob, pak k dosavadnímu kriteriálnímu řádku připočteme $\frac{7}{2}$ násobek řádku klíčového.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$

K výpočtu druhým způsobem musíme nejprve vyplnit dva předřazené sloupce, tj. jednak musíme určit bazické proměnné a jednak musíme vypsat jejich cenové koeficienty. Víme, že v tomto kroku simplexové metody nebazická proměnná x_2 vyměnila bazickou proměnnou x_4. Tedy řádek, který doposud náležel proměnné x_4 bude nyní náležet proměnné x_2.
Správné přiřazení jednotlivých řádků jednotlivým bazickým proměnným si můžeme ověřit tak, že ve sloupci dané bazické proměnné je jednička právě v tom řádku, který je dané proměnné přiřazen.
Cenové koeficienty již vypíšeme lehce.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$

Hodnotu v kriteriálním řádku ve sloupci náležejícím jednotlivým proměnným vypočteme následovně.
$x_1 \dots (7 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 4 + 0 \cdot \frac{5}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}) - 4 = -\frac{1}{2}$
$x_2 \dots (7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 7 = 0$
$x_3 \dots (7 \cdot (-2) + 0 \cdot (-7) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3) - 3 = -17$
$x_4 \dots (7 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot (-\frac{1}{2})) - 0 = \frac{7}{2}$
$x_5 \dots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_6 \dots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_7 \dots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0$
sloupec pravých stran $\dots (7 \cdot \frac{5}{2} + 0 \cdot 12 + 0 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot \frac{7}{2}) - 0 = \frac{35}{2}$
Vidíme, že jsme obdrželi stejný tvar kriteriálního řádku jako v případě předchozího způsobu, tedy:

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$
		$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$

Z dané tabulky můžeme vyčíst následující závěry.
Jednak vidíme, že proměnné x_1, x_3 a x_4 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_2, x_5, x_6 a x_7 bazické jsou a jejicj hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Okamžité řešení je tedy následující.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 & \qquad x_5 &= 12 \\
x_2 &= \frac{5}{2} & x_6 &= \frac{3}{2} \\
x_3 &= 0 & x_7 &= \frac{7}{2} \\
x_4 &= 0 & z &= \frac{35}{2}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v aktuální simplexové tabulce se v kriteriálním řádku vyskytují záporné hodnoty, což při maximalizační úloze znamená, že jsme ještě nedosáhli optimální hodnoty účelové funkce.
Proto musíme opět vybrat klíčový sloupec. Bude jím sloupec náležející proměnné x_3, protože ten obsahuje v kriteriálním řádku zápornou hodnotu, která je v absolutní hodnotě největší ze všech záporných hodnot v kriteriálním řádku. Tento výběr značí, že nebazická proměnná x_3 bude vstupovat do báze, což znamená, že byla doposud nulová a v dalším kroku simplexové metody se stane kladnou.
Dále musíme vybrat klíčový řádek. Ten vybereme pomocí pomocných podílů, ve kterých budeme dělit postupně jednotlivé hodnoty sloupce pravých stran jednotlivými hodnotami klíčového sloupce. Z těchto podílů vybereme nejmenší kladný. Ten bude určovat klíčový řádek.

		4	7	3	0	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	záporné
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12	záporné
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	nelze
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{6}$
		$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$	

Vidíme, že dva z podílů jsou záporné, v jednom by se dělilo nulou a zůstává pouze jediný podíl s kladnou hodnotou. To znamená, že je nejmenším kladným podílem. Tento podíl je v řádku, který je přiřazen bazické proměnné x_7. Tento řádek tedy bude vybrán jako klíčový řádek. To znamená, že nebazická proměnná x_3 v bázi vystřídá bazickou proměnnou x_7.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	**3**	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$
		$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$

Nyní upravíme stávající simplexovou tabulku pomocí povolených úprav tak, aby v klíčovém sloupci byly samé nuly, pouze na pozici klíčového řádku byla v tomto sloupci jednička. Nejdříve upravíme klíčový řádek, a to tak, že jej celý vydělíme číslem, které leží na průniku klíčového řádku a sloupce, v našem případě číslem 3.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$

Nyní upravíme i zbývající tři řádky, a to tak, že ke každému z nich přičteme vhodný násobek klíčového řádku, respektive od každého z nich vhodný násobek odečteme.K prvnímu řádku přičteme $\frac{2}{3}$ násobek klíčového řádku, k druhému přičteme $\frac{7}{3}$ násobek a v třetím řádku je na pozici klíčového sloupce nula, proto jej upravovat nemusíme, stačí jej opsat.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{29}{6}$
	$\frac{31}{6}$	0	0	$\frac{10}{6}$	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{121}{6}$
	$\frac{5}{2}$	0	0	-2	0	1	0	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$

Nyní ještě musíme vyplnit kriteriální řádek. K tomu nejprve vyplníme předřazené sloupce. Víme, že proměnná x_3 v bázi nahradila proměnnou x_7, tedy v poslední řádek nyní bude náležet této nové bazické proměnné.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{29}{6}$
0	x_5	$\frac{31}{6}$	0	0	$\frac{10}{6}$	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{121}{6}$
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	-2	0	1	0	$\frac{3}{2}$
3	x_3	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$

Hodnotu v kriteriálním řádku ve sloupci náležejícím jednotlivým proměnným vypočteme následovně.
$x_1 \ldots (7 \cdot \frac{5}{6} + 0 \cdot \frac{31}{6} + 0 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6}) - 4 = \frac{14}{6}$
$x_2 \ldots (7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0) - 7 = 0$
$x_3 \ldots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1) - 3 = 0$
$x_4 \ldots (7 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{10}{6} + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (-\frac{1}{6})) - 0 = \frac{4}{6}$
$x_5 \ldots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_6 \ldots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_7 \ldots (7 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{7}{3} + 0 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3}) - 0 = \frac{17}{3}$
sloupec pravých stran $\ldots (7 \cdot \frac{29}{6} + 0 \cdot \frac{121}{6} + 0 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{7}{6}) - 0 = \frac{224}{6}$
Přepočtená simplexová tabulka tedy bude vypadat následovně.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{29}{6}$
0	x_5	$\frac{31}{6}$	0	0	$\frac{10}{6}$	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{121}{6}$
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	-2	0	1	0	$\frac{3}{2}$
3	x_3	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$
		$\frac{14}{6}$	0	0	$\frac{4}{6}$	0	0	$\frac{17}{3}$	$\frac{224}{6}$

Vidíme, že v kriteriálním řádku se již nevyskytují žádné záporné hodnoty, což při řešení maximalizační úlohy znamená, že jsme dosáhli optimální hodnoty účelové funkce. Z tabulky tedy můžeme vyčíst výsledky.
Jednak vidíme, že proměnné x_1, x_4 a x_7 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_2, x_3, x_5 a x_6 bazické jsou a jejich hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Výsledné optimální řešení je tedy následující.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x_5 &= \frac{121}{6} \\ x_2 &= \frac{29}{6} & x_6 &= \frac{3}{2} \\ x_3 &= \frac{7}{6} & x_7 &= 0 \\ x_4 &= 0 & z &= \frac{224}{6} \end{aligned}$$

1.11. Vyřešte úlohu lineárního programování z příkladu 1.2

Řešení: Připomeňme si zadání.

Podnik vyrábí dva druhy výrobků - V1 a V2. Ve sledovaném období máme k dispozici pouze 180 hodin práce potřebného odborníka, přičemž tohoto odborníka potřebujeme 2 hodiny při výrobě každého výrobků V1 a 1 hodinu na výrobu V2. Potřebujeme vyrobit výrobků V1 nejvýše o 5 více než je polovina počtu výrobků V2. Naopak výrobků V2 můžeme vyrobit maximálně o 30 více než výrobků V1. Jak máme naplánovat výrobu, pokud je naším cílem optimalizovat zisky, a víme, že na každém výrobku V1 zisk 300 Kč a na výrobku V2 zisk 400 Kč.
Již dříve jsme v příkladu 1.2 vytvořili matematický model úlohy. Můžeme zde shrnout výsledek.
Máme dvě proměnné, a to:
x_1 ... počet výrobků V1
x_2 ... počet výrobků V2
Matematický model má podobu.

$$\begin{aligned} z &= 300x_1 + 400x_2 \dots \max \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 180 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 &\leq 5 \\ x_2 - x_1 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nyní celou úlohu převedeme do kanonického tvaru. Vidíme, že všechny tři nerovnice vlastního omezení jsou typu $\leq$, proto při převodu každé této nerovnice na rovnici přidáme jednu přídatnou proměnnou, kterou budeme přičítat. Dále již žádnou další úpravu dělat nemusíme. Tím obdržíme kanonický tvar

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 180 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 5 \\ -1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 30 \end{aligned}$$

Ke kanockému tvaru můžeme ještě přidat řádek náležející účelové funkci v následujícím tvaru:

$$z - 300x_1 - 400x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$$

V dalším fázi postupu vytvoříme na základě kanonického tvaru úlohy inicializační simplexovou tabulku.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	1	1	0	0	180
0	x_4	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	5
0	x_5	-1	1	0	0	1	30
		-300	-400	0	0	0	0

Nyní si uvědomme, jaké počáteční řešení náleží k této inicializační tabulce. Víme, že všechny nebazické proměnné (tj. proměnné, které nenáleží k jednotlivým jednotkovým sloupcovým vektorům báze a tedy nejsou vypsány v předřazeném sloupci) budou mít nulovou hodnotu, hodnoty bazických proměnných (tj. proměnných, které náleží k jednotlivým jednotkovým sloupcovým vektorům báze a tedy jsou vypsány v předřazeném sloupci) nalezneme vždy v daném řádku v pravém sloupci. Aktuální hodnotu účelové funkce nalezneme v posledním řádku v posledním sloupci tabulky.

$$x_1 = 0 \qquad x_4 = 5$$
$$x_2 = 0 \qquad x_5 = 30$$
$$x_3 = 180 \qquad z = 0$$

Co tento výsledek znamená? První dvě proměnné jsou rovny 0, což znamená, že nevyrábíme žádný výrobek. Třetí proměnná je rovna 180, což znamená, že nám zbylo 180 volných, nevyužitých hodin odborníka. Čtvrtá proměnná je rovna 5, což znamená, že ještě můžeme vyrobit 5 kusů výrobku V1, aniž bychom překročili omezení. Pátá proměnná je rovna 30, což znamená, že ještě můžeme vyrobit 30 kusů výrobku V2, aniž bychom překročili omezení. Aktuální hodnota účelové funkce je nulová, což znamená, že v tomto případě nemáme žádné zisky.
Toto řešení je viditelně přípustné, avšak zřejmě nikoliv optimální - jistě doufáme, že bychom nějaké zisky mohli získat. Proto přistoupíme k řešení úlohy simplexovou metodou.
V prvním kroku zpracování musíme vybrat klíčový sloupec. Protože se jedná o maximalizační úlohu, budeme si v kriteriálním řádku všímat záporných hodnot a vybereme ten sloupec, který má v kriteriálním řádku ze všech záporných hodnot tu, která je v absolutní hodnotě největší. V našem případě tedy vybereme sloupec, který má v kriteriálním řádku hodnotu -400.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	1	1	0	0	180
0	x_4	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	5
0	x_5	-1	1	0	0	1	30
		-300	-400	0	0	0	0

Nyní musíme nalézt klíčový řádek. Ten vyhledáme na základě pomocných podílů, kdy v každém řádku vydělíme hodnotu v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci. Klíčovým řádkem bude ten, který má tento podíl ze všech kladných podílů nejmenší.

		300	400	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	2	1	1	0	0	180	180
0	x_4	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	5	-10
0	x_5	-1	**1**	0	0	1	30	**30**
		-300	-400	0	0	0	0	

Nyní si můžeme uvědomit, co znamená výběr klíčového sloupce a klíčového řádku. Klíčový sloupec náleží jedné z nebazických proměnných, v našem případě proměnné x_2. Tato proměnná bude vstupovat do báze. Naopak klíčový řádek náleží jedné z bazických proměnných, v našem případě proměnné x_5. Tato proměnná bude z báze vystupovat.
Prakticky to znamená, že začneme vyrábět nějaké výrobky V2 (neboť proměnná x_2 představující počet vyrobených výrobků V2 byla doposud nulová, ale vstupem do báze se její hodnota změní na nenulovou).
Naopak zcela vyčerpáme omezení na počet výrobků V2 (neboť proměnná x_5 představující množství výrobků, které můžeme ještě vyrobit, aniž bychom překročili omezení, byla doposud nenulová, ale výstupem z báze se vynuluje).
V následujícím kroku přepočteme simplexovou tabulku tak, aby odpovídala stavu, že proměnná x_2 v bázi vystřídá proměnnou x_5.
Nejprve upravíme klíčový řádek, a to tak, aby na pozici, kde se protíná klíčový řádek s klíčovým sloupcem byla jednička. V našem případě vidíme, že na pozici již jednička je, tedy řádek upravovat nemusíme, stačí jej pouze opsat.
Po úpravě klíčového řádku postupně přistoupíme k úpravě všech ostatních řádků. Od každého z nich vždy odečteme vhodný násobek klíčového řádku tak, aby na pozici klíčového sloupce vznikla 0. To znamená, že od prvního řádku odečteme klíčový řádek (protože na pozicích klíčového sloupce jsou v obou těchto řádcích 1). Od druhéhe řádku odečteme $-\frac{1}{2}$ klíčového řádku, jinými slovy přičteme $\frac{1}{2}$ klíčového řádku.
Takto upravené tělo tabulky bude vypadat následovně.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		3	0	1	0	-1	150
		$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20
		-1	1	0	0	1	30

Při vyplňování kriteriálního sloupce máme dvě možnosti postupu. Vždy si můžeme vybrat kteroukoliv z nich. Jedním z možných postupů je využití povolené operace Gaussovy eliminační metody tak, jak jsme již používali při úpravě jednotlivých neklíčových řádků simplexové tabulky. Opět si musíme uvědomit, že na pozici klíčového sloupce v kriteriálním řádku musí být 0. Úpravu tedy provedeme přičtením vhodného násobku klíčového sloupce (v našem případě čtyřsetnásobku) ke kriteriálnímu řádku. Výsledný kriteriální řádek tedy bude mít tvar

		-700	0	0	0	400	12000

Abychom mohli vyplnit kriteriální řádek druhým zmíněným způsobem, musíme si uvědomit, který z řádků náleží ke které bazické proměnné. To, jak už jsme si dříve řekli, poznáme z pozic jedniček ve sloupcích jednotkové submatice.
V naší tabulce vidíme, že v prvním řádku je jednička ve sloupci jednotkové matice, který náleží k proměnné x_3. Proto bude první řádek také náležet této proměnné. V druhém řádku je jednička ve sloupci jednotkové matice, který náleží k proměnné x_4, proto bude první řádek také náležet proměnné x_4. Ve třetím řádku je jednička ve sloupci jednotkové matice, který náleží k proměnné x_2, proto bude první řádek také náležet proměnné x_2. Můžeme tedy vyplnit předřazené sloupce.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	3	0	1	0	-1	150
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20
400	x_2	-1	1	0	0	1	30

Hodnotu v kriteriálním sloupci na pozici daného sloupce nyní vypočítáme jako skalární součin vektoru cen bazických proměnných (je obsažen v prvním předřazeném sloupci)

a vektoru daného sloupce. Od výsledné hodnoty odečteme cenový koeficient umístěný v prvním předřazeném řádku v daném sloupci.
Tedy hodnotu na první pozici kriteriálního řádku vypočítáme jako skalární součin vektorů $(0,0,400)$ a $(3,\frac{1}{2},-1)$ a následně odečteme hodnotu 300.
$(0,0,400)\times(3,\frac{1}{2},-1)=-400$
$-400-300=-700$
Vidíme, že jsme obdrželi stejnou hodnotu, jaká je i na první pozici kriteriálního řádku vypočteného prvním způsobem.
Výpočty hodnot z následujících sloupců vypočítáme obdobně.

$$\begin{aligned}
&(0,0,400)\times(0,0,1)=400 && 400-400=0\\
&(0,0,400)\times(1,0,0)=0 && 0-0=0\\
&(0,0,400)\times(0,10,0)=0 && 0-0=0\\
&(0,0,400)\times(-1,\frac{1}{2},1)=400 && 400-0=400\\
&(0,0,400)\times(150,20,30)=12000 && 12000-0=12000
\end{aligned}$$

Vidíme, že nám vyšly zcela shodné hodnoty jako při prvním způsobu výpočtu. Celá upravená tabulka má tedy tvar

		300 x_1	400 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	
0	x_3	3	0	1	0	-1	150
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20
400	x_2	-1	1	0	0	1	30
		-700	0	0	0	400	12000

Z dané tabulky můžeme vyčíst následující závěry.
Jednak vidíme, že se v kriteriálním řádku vyskytuje záporná hodnota, proto ještě nejsme v optimu. Dále vidíme, že proměnné x_1 a x_5 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_2, x_3 a x_4 bazické jsou a jejicj hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Okamžité řešení je tedy následující.

$$\begin{aligned}
&x_1=0 && x_4=20\\
&x_2=30 && x_5=0\\
&x_3=150 && z=12000
\end{aligned}$$

Víme tedy, že pokud vyrobíme 30 kusů výrobku V2, budeme mít zisky 12000 Kč, zbyde nám 150 volných hodin našeho specialisty a můžeme ještě vyrobit 20 kusů výrobku V1, aniž bychom překročily omezení. Naopak omezení na možný počet výrobků V2 je již zcela vyčerpán.
Jak jsme již řekli, z kriteriálního řádku je zřejmé, že jsme ještě nedosáhli optimální hodnoty, že současný stav ještě můžeme vylepšit. Budeme tedy opět aplikovat postup od výběru klíčového sloupce. Jelikož je v kriteriálním řádku pouze jedinná záporná hodnota, a to -700, bude klíčovým slopcem první sloupec, který náleží nebazické proměnné x_1. Při hledání klíčového řádku musíme opět nejprve provést pomocné podíly.

		300 x_1	400 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5		
0	x_3	3	0	1	0	-1	150	50
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20	40
400	x_2	-1	1	0	0	1	30	-30
		-700	0	0	0	400	12000	

Nejmenším kladným podílem je 40, proto zvolíme jako klíčový druhý řádek, který náleží bazické proměnné x_4. Další úpravy povedou ke vstupu proměnné x_1 do báze

a zároveň k výstupu proměnné x_4 z báze.
Nejdříve upravíme klíčový řádek, a to tak, že jej vydělíme klíčovým prvkem (tj. hodnotou, která se nalézá na průsečíku klíčového řádku a klíčového sloupce). V našem případě budeme dělit číslem $\frac{1}{2}$.
Následně upravíme první řádek tak, že od něj odečteme šestinásobek klíčového řádku (protože $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$).
Nakonec upravíme i třetí řádek tak, že k němu přičteme třetinu klíčového řádku (protože odečítáme $\frac{-1}{3}$ násobek, což znamená že přičítáme $\frac{1}{3}$ násobek). Upravené tělo simplexové tabulky vypadá takto:

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	0	1	-6	-4	30
		1	0	0	2	1	40
		0	1	0	2	2	70

Nyní vyplníme předřazené sloupce. Pro každý řádek zjistíme, ke které bazické proměnné náleží. V prvním řádku můžeme nalézt jedničku ve sloupci jednotkové matice náležícím proměnné x_3. Proto v tomto řádku vyplníme do předsazených sloupců údaje 0 a x_3. Obdobnou úvahou můžeme zjistit, že v druhém řádku vyplníme údaje 300 a x_1 a ve třetím řádku 400 a x_4. Dostáváme se tedy k tabulce ve stavu:

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-6	-4	30
300	x_1	1	0	0	2	1	40
400	x_2	0	1	0	2	2	70

Nakonec vyplníme kriteriální řádek. Víme, že ve sloupcích náležících jednotkové submatici budou v kriteriálním řádku nuly. Proto vyplníme do prvních tří sloupců 0. V ostatních sloupcích musíme hodnoty vypočítat.

$$
\begin{aligned}
&(0, 300, 400) \times (-6, 2, 2) = 1400 && 1400 - 0 = 1400 \\
&(0, 300, 400) \times (-4, 1, 2) = 1100 && 1100 - 0 = 1100 \\
&(0, 300, 400) \times (30, 40, 70) = 40000 && 40000 - 0 = 40000
\end{aligned}
$$

Výsledná tabulka vypadá následovně.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-6	-4	30
300	x_1	1	0	0	2	1	40
400	x_2	0	1	0	2	2	70
		0	0	0	1400	1100	40000

Vidíme, že v kriteriálním řádku se již nevyskytuje žádná záporná hodnota. Našli jsme se tedy optimum. Zbývá nám již jen z výsledné simplexové tabulky určit optimální řešení zadané úlohy LP. Víme, že všechny nebazické proměnné nabývají nulových hodnot, a že hodnoty bazických proměnných nalezneme v příslušných řádcích v posledním odděleném sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. Výslednou optimální hodnotu účelové funkce vyčteme v kriteriálním řádku opět v posledním sloupci. Konečné optimální řešení je tedy následující:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 40 && x_4 = 0 \\
&x_2 = 70 && x_5 = 0 \\
&x_3 = 30 && z = 40000
\end{aligned}
$$

Na závěr shrneme získaný výpočet do slovní odpovědi.

Z hlediska optimalizace zisků je pro náš podnik nejvýhodnější vyrobit 40 kusů výrobku V1 a 70 kusů výrobku V2. V tomto případě budeme mít zisk 40000 Kč. Zbyde nám 30 volných hodin odborníka, obě omezení na počty jednotlivých výrobků jsme plně využili.

1.12. Vyřešte následující úlohu lineárního programování:

Na domácí párty jsme se rozhodli narychlo vytvořit speciální teplé nápoje - kávu s přídavkem kakaa. Budeme míchat dvě různé směsi - sladkou směs s cukrem a směs, kde je více kakaa. Do sladké směsi ("s cukrem") dáme 2 lžičky kávy, 2 lžičky kakaa a 1 kostku cukru, do směsi "bez cukru"dáme 3 lžičky kakaa a 1 lžičku kávy. K dispozici máme 36 lžiček kakaa, 20 lžiček kávy a 8 kostek cukru. Jak máme uvařit nápoje, chceme-li dané suroviny co nejlépe využít a vytvořit co nejvíce nápojů?

Řešení: Nejdříve vytvoříme matematický model úlohy. Našimi proměnnými budou jednak x_1 představující množství nápojů prvního typu a jednak x_2 představující množství nápojů druhého typu. Obě proměnné tedy reprezentují určitá množství, to znamená, že nemohou nabývat záporných hodnot. Proto musí být splněny podmínky nezápornosti.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dále vytvoříme účelovou funkci. Víme, že naším cílem je vytvořit co nejvíce nápojů, proto se bude jednat o maximalizační úlohu. Jak jsme před chvílí řekli, jednotlivé proměnné představují množství jednotlivých nápojů, celkové množství nápojů tedy získáme sečtením těchto dvou proměnných.

$$z = x_1 + x_2 \ldots \max$$

Nakonec sestavíme všechny nerovnice vyjadřující jednotlivé podmínky vlastního omezení. V textu zadání najdeme, čeho se jednotlivá omezení týkají a kolik jich bude. Vidíme, že první omezení se bude týkat informace, že máme k dispozici pouze 36 lžiček kakaa, druhé omezení se týká omezujícího množství 20 lžiček kávy a poslední omezení bude informovat o disponibilním množství 8 kostek cukru.

Dále si uvědomíme, kde a v jakém množství spotřebováváme jednotlivé suroviny. Vidíme, že na přípravu jednoho nápoje prvního typu potřebujeme 2 lžičky kakaa a na přípravu jednoho nápoje druhého typu potřebujeme 3 lžičky kakaa. Jelikož proměnná x_1 představuje množství nápojů prvního typu, pak celkovou spotřebu kakaa na všechny tyto nápoje můžeme vyjádřit vztahem $2x_1$. Obdobnou úvahou můžeme říci, že celková spotřeba kakaa na všechny nápoje druhého typu bude vyjádřena vztahem $3x_2$. Nyní již můžeme sestavit nerovnici vyjadřující první podmínku vlastního omezení

$$2x_1 + 3x_2 \leq 36$$

Dále vidíme, že na přípravu jednoho nápoje prvního typu potřebujeme 2 lžičky kávy, a na přípravu jednoho nápoje druhého typu potřebujeme 1 lžičku kávy. Jelikož proměnná x_1 představuje množství nápojů prvního typu, pak celkovou spotřebu kávy na všechny tyto nápoje můžeme vyjádřit vztahem $2x_1$. Obdobnou úvahou můžeme říci, že celková spotřeba kávy na všechny nápoje druhého typu bude vyjádřena vztahem $1x_2$. Nyní již můžeme sestavit nerovnici vyjadřující druhou podmínku vlastního omezení

$$2x_1 + 1x_2 \leq 20$$

Při tvorbě nerovnice posledního vlastního omezení si musíme všimnout, že na přípravu jednoho nápoje prvního typu potřebujeme 1 kostku cukru, a na přípravu jednoho nápoje druhého typu nepotřebujeme cukr vůbec. Jelikož proměnná x_1 představuje množství nápojů prvního typu, pak celkovou spotřebu cukru na všechny tyto nápoje můžeme vyjádřit vztahem $1x_1$. Obdobnou úvahou můžeme říci, že celková spotřeba cukru na všechny nápoje druhého typu bude vyjádřena vztahem $0x_2$. Nyní již můžeme sestavit nerovnici vyjadřující druhou podmínku vlastního omezení

$$1x_1 + 0x_2 \leq 8$$

Nyní můžeme shrnout výslednou podobu matematického modelu.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 \ldots \max \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 20 \\ 1x_1 + 0x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vytvořenou úlohu převedeme v dalším kroku do kanonického tvaru. Vidíme, že všechny tři nerovnice vlastního omezení jsou typu $\leq$, proto při převodu každé této nerovnice na rovnici přidáme jednu přídatnou proměnnou, kterou budeme přičítat. Dále již žádnou další úpravu dělat nemusíme. Tím obdržíme kanonický tvar

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 36 \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 20 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 8 \end{aligned}$$

Ke kanockému tvaru můžeme ještě přidat řádek náležející účelové funkci v následujícím tvaru:

$$z - 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$$

V dalším fázi postupu vytvoříme na základě kanonického tvaru úlohy inicializační simplexovou tabulku.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	3	1	0	0	36
0	x_4	2	1	0	1	0	20
0	x_5	1	0	0	0	1	8
		-1	-1	0	0	0	0

Počáteční řešení náleží k této inicializační tabulce je následující.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x_4 &= 20 \\ x_2 &= 0 & x_5 &= 8 \\ x_3 &= 36 & z &= 0 \end{aligned}$$

Co tento výsledek znamená? První dvě proměnné jsou rovny 0, což znamená, že nevyrábíme žádný z nápojů. Třetí proměnná je rovna 36, což znamená, že nám zbylo 36 lžiček kakaa. Čtvrtá proměnná je rovna 20, což znamená, že nám zbylo 20 lžiček kávy. Pátá proměnná je rovna 8, což znamená, že máme ještě 8 kostek cukru. Aktuální hodnota účelové funkce je nulová, což znamená, že v tomto případě nemáme uvařené žádné nápoje.

Nyní přistoupíme k řešení úlohy simplexovou metodou.

V prvním kroku zpracování musíme vybrat klíčový sloupec. Protože se jedná o maximalizační úlohu, budeme si v kriteriálním řádku všímat záporných hodnot a vybereme ten sloupec, který má v kriteriálním řádku ze všech záporných hodnot tu, která je v absolutní hodnotě největší. V našem případě vidíme, že v kriteriálním řádku se dvakrát vyskytuje hodnota -1. Je jedno, kterou z nich vybereme, například tedy první.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	3	1	0	0	36
0	x_4	2	1	0	1	0	20
0	x_5	1	0	0	0	1	8
		-1	-1	0	0	0	0

Nyní musíme nalézt klíčový řádek. Ten vyhledáme na základě pomocných podílů, kdy v každém řádku vydělíme hodnotu v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci. Klíčovým řádkem bude ten, který má tento podíl ze všech kladných podílů nejmenší.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	2	3	1	0	0	36	18
0	x_4	2	1	0	1	0	20	10
0	x_5	**1**	0	0	0	1	8	**8**
		-1	-1	0	0	0	0	

Klíčový sloupec náleží jedné z nebazických proměnných, v našem případě proměnné x_1. Tato proměnná bude vstupovat do báze. Naopak klíčový řádek náleží jedné z bazických proměnných, v našem případě proměnné x_5. Tato proměnná bude z báze vystupovat.
Prakticky to znamená, že začneme vařit nějaké sladké nápoje (neboť proměnná x_1 představující počet těchto nápojů byla doposud nulová, ale vstupem do báze se její hodnota změní na nenulovou).
Naopak zcela vyčerpáme cukr (neboť proměnná x_5 představující počet kostek cukru, byla doposud nenulová, ale výstupem z báze se vynuluje).
V následujícím kroku přepočteme simplexovou tabulku tak, aby odpovídala stavu, že proměnná x_1 v bázi vystřídá proměnnou x_5.
Nejprve upravíme klíčový řádek, a to tak, aby na pozici, kde se protíná klíčový řádek s klíčovým sloupcem byla jednička. V našem případě vidíme, že na pozici již jednička je, tedy řádek upravovat nemusíme, stačí jej pouze opsat.
Po úpravě klíčového řádku postupně přistoupíme k úpravě všech ostatních řádků. Od každého z nich vždy odečteme vhodný násobek klíčového řádku tak, aby na pozici klíčového sloupce vznikla 0. To znamená, že od prvního i od druhého řádku odečteme dvojnásobek klíčového řádku (protože na pozicích klíčového sloupce jsou v obou těchto sloupcích 2).
Zároveň určíme bazické proměnné, tedy proměnné, kterým náleží jednotlivé řádky tabulky. Budeme se řídit pozicí jedniček v rámci jednotkové submatice.
Takto upravené tělo tabulky bude vypadat následovně.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	3	1	0	-2	20
0	x_4	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8

Nyní ještě vyplníme poslední, kriteriální řádek. V tomto případě bude výhodnější využít postupů Gaussovy metody, protože si můžeme všimnout, že v klíčovém řádku je na pozici klíčového sloupce 1 a v kriteriálním řádku -1. Můžeme tedy provést jednoduchou úpravu, a to přičtení klíčového řádku ke kriteriálnímu. Pak dostáváme celou upravenou tabulku.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	3	1	0	-2	20
0	x_4	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8
		0	-1	0	0	1	8

Z dané tabulky můžeme vyčíst následující závěry.
Vidíme, že se v kriteriálním řádku vyskytuje záporná hodnota, proto ještě nejsme v optimu. Dále vidíme, že proměnné x_2 a x_5 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_1, x_3 a x_4 bazické jsou a jejicj hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Okamžité řešení je tedy následující.

$$x_1 = 8 \qquad x_4 = 4$$
$$x_2 = 0 \qquad x_5 = 0$$
$$x_3 = 20 \qquad z = 8$$

Víme tedy, že pokud uvaříme 8 sladkých nápojů a žádný nesladký, budeme mít celkem osm nápojů. Zbyde nám 20 lžiček kakaa, 4 lžičky kávy a žádný cukr.
Uvědomili jsme si, že jsme ještě nedosáhli optimální hodnoty. Budeme tedy opět aplikovat postup od výběru klíčového sloupce. Jelikož je v kriteriálním řádku pouze jedinná záporná hodnota, a to -1, bude klíčovým slopcem druhý sloupec, který náleží nebazické proměnné x_2. Při hledání klíčového řádku musíme opět nejprve provést pomocné podíly.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	3	1	0	-2	20	$\frac{20}{3}$
0	x_4	0	1	0	1	-2	4	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8	nelze
		0	-1	0	0	1	8	

Nejmenším kladným podílem je 4, proto zvolíme jako klíčový druhý řádek, který náleží bazické proměnné x_4.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	3	1	0	-2	20	$\frac{20}{3}$
0	x_4	0	**1**	0	1	-2	4	**4**
1	x_1	1	0	0	0	1	8	nelze
		0	-1	0	0	1	8	

Další úpravy povedou ke vstupu proměnné x_2 do báze a zároveň k výstupu proměnné x_4 z báze. Vidíme, že klíčový řádek má na místě klíčového prvku jedničku. Proto jej nemusíme upravovat, stačí jej opsat do nové tabulky.
Následně upravíme první řádek tak, že od něj odečteme trojnásobek klíčového řádku (protože $\frac{3}{1} = 3$).
Nakonec si můžeme všimnout, že třetí řádek má na pozici klíčového sloupce 0, to znamená, že jej nemusíme nijak upravovat, ale stačí jej opsat. Upravené tělo simplexové tabulky vypadá takto:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	0	1	-3	4	8
		0	1	0	1	-2	4
		1	0	0	0	1	8

Nyní vyplníme předřazené sloupce. Pro každý řádek zjistíme, ke které bazické proměnné náleží. V prvním řádku můžeme nalézt jedničku ve sloupci jednotkové matice náležícím proměnné x_3. Proto v tomto řádku vyplníme do předsazených sloupců údaje 0 a x_3. Obdobnou úvahou můžeme zjistit, že v druhém řádku vyplníme údaje 1 a x_2 a ve třetím řádku 1 a x_1. Dostáváme se tedy k tabulce ve stavu:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-3	4	8
1	x_2	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8

Nakonec vyplníme kriteriální řádek. Víme, že ve sloupcích náležících jednotkové submatici budou v kriteriálním řádku nuly. Proto vyplníme do prvních tří sloupců 0. V ostatních sloupcích musíme hodnoty vypočítat.

$$(0,1,1)\times(-3,1,0)=1 \qquad 1-0=1$$
$$(0,1,1)\times(4,-2,1)=-1 \qquad -1-0=-1$$
$$(0,1,1)\times(8,4,8)=12 \qquad 12-0=12$$

Výsledná tabulka vypadá následovně.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-3	4	8
1	x_2	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8
		0	0	0	1	-1	12

V kriteriálním řádku se vyskytuje jedna záporná hodnota, proto víme, že jsme ještě nedosáhli optima. Nejdříve ale můžeme z naposledy vypočítané simplexové tabulky určit aktuální řešení zadané úlohy LP. Víme, že všechny nebazické proměnné nabývají nulových hodnot, a že hodnoty bazických proměnných nalezneme v příslušných řádcích v posledním odděleném sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. Výslednou optimální hodnotu účelové funkce vyčteme v kriteriálním řádku opět v posledním sloupci. Aktuální řešení je tedy následující:

$$x_1=8 \qquad x_4=0$$
$$x_2=4 \qquad x_5=0$$
$$x_3=8 \qquad z=12$$

Nyní shrneme získaný výpočet do slovní odpovědi. Pokud uvaříme 8 sladkých nápojů a 4 nesladké, budeme mít celkem 12 nápojů. Zbyde nám 8 lžiček kakaa a žádná káva ani cukr. Vidíme, že se celkový počet vyrobených nápojů zvýšil, což bylo naším cílem. Jak už jsme si ale uvědomili, nedosáhli jsme ještě optima, tedy že můžeme při jiném rozložení uvařit celkově větší množství nápojů. Musíme tedy postupovat dalším krokem výpočtu.

Opět začneme hledáním klíčového sloupce. Bude to sloupec obsahující v kriteriálním řádku hodnotu -1, což je sloupec náležející proměnné x_5. Jedná se o jednu z nebazických proměnných, která tímto krokem vstoupí do báze. To znamená, že z původně nulové hodnoty nabude hodnoty kladné. Uvedeme si tabulku s vyznačeným klíčovým sloupcem.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-3	4	8
1	x_2	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8
		0	0	0	1	-1	12

Pro nalezení klíčového řádku musíme vypočíst pomocné podíly, a to následovně.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	0	1	-3	4	8	2
1	x_2	0	1	0	1	-2	4	záporné
1	x_1	1	0	0	0	1	8	8
		0	0	0	1	-1	12	

Nejmenší kladný podíl je v prvním řádku, tento tedy byde vybrán za klíčový řádek. Tento řádek náleží bazické proměnné x_3, tedy tato proměnná bude vystupovat z báze. Znamená to, že tato doposud nenulová proměnná se stane nulovou.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	0	1	-3	**4**	8	2
1	x_2	0	1	0	1	-2	4	záporné
1	x_1	1	0	0	0	1	8	8
		0	0	0	1	-1	12	

Nyní přistoupíme k úpravě tabulky. Nejprve upravíme klíčový řádek, a to tak, že jej celý vydělíme klíčovým prvkem, tedy hodnotou 4.
Po úpravě klíčového řádku přistoupíme k úpravě i ostatních řádků.
Druhý řádek upravíme tak, že od něj odečteme $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ násobek klíčového řádku. Tento fakt můžeme říci i jiným způsobem, a to že přičteme $\frac{1}{2}$ násobek klíčového řádku. Třetí řádek upravíme tak, že od něj odečteme $\frac{1}{4}$ násobek klíčového řádku.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
		0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	8
		1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	6

Nyní určíme, který řádek náleží které bazické proměnné. Toto provádíme hledáním jedniček v daném řádku.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_5	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	8
1	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	6

Následně upravíme i kriteriální řádek, a to tak, že ve sloupcích náležících jednotkové submatici budou v kriteriálním řádku nuly. V ostatních sloupcích musíme hodnoty vypočítat.

$$(0,1,1) \times (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$
$$(0,1,1) \times (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$
$$(0,1,1) \times (2,8,6) = 14 \qquad 14 - 0 = 14$$

Takto upravená tabulka vypadá následovně:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_5	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	8
1	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	6
		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	14

V kriteriálním řádku se nyní vyskytují pouze nezáporné hodnoty, proto víme, že jsme dosáhli optima. Z výsledné tabulky tedy vyčteme výsledné hodnoty jednotlivých proměnných, a to dle toho, zda se jedná o bazické či nebazické proměnné.

$$\begin{array}{ll} x_1 = 6 & x_4 = 0 \\ x_2 = 8 & x_5 = 2 \\ x_3 = 0 & z = 14 \end{array}$$

Nyní shrneme získaný výpočet do slovní odpovědi.
Optimální je uvařit 6 sladkých a 8 nesladkých nápojů. Budeme tedy mít celkem 14 nápojů. Zbydou pouze 2 kostky cukru, nezbyde nám žádná káva ani žádné kakao.

1.13. Předchozí úlohu LP vyřešte graficky.

Řešení: Pro grafické řešení si připomeňme matematický model úlohy, který jsme vytvořili při řešení předchozího příkladu, a to:

$$\begin{array}{rcl} z & = & x_1 + x_2 \ldots \max \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 36 \\ 2x_1 + 1x_2 & \leq & 20 \\ 1x_1 + 0x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

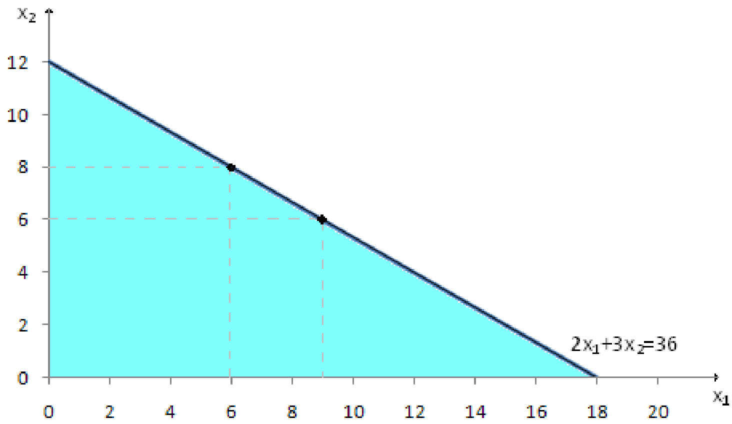
Poslední dvě nerovnice matematického modelu (tj. podmínky nezápornosti) nám říkají, že hladaná řešení se budou nacházet pouze v prvním kvadrantu.
Pro každou z ostatních nerovnic sestrojíme polorovinu, která je grafickým obrazem dané nerovnice. Připomeňme si, že ke konstrukci poloroviny je nutno nejdříve sestrojit přímku náležející k příslušné rovnici. Dále si musíme uvědomit, že každá přímka je dána dvěma body. Souřadnice těchto bodů musí splňovat příslušnou rovnici. Přímka příslušející rovnicí $2x_1 + 3x_2 = 36$ je dána například body $[6, 8]$ a $[9, 6]$. Tato přímka je znázorněna na obrázku 1.18.
Nyní musíme určit, která z polorovin vzniklých rozdělením celé roviny sestrojenou přímkou, náleží k dané nerovnici. To zjistíme například tak, že do nerovnice dosadíme souřadnice počátku, tj. $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$. Vidíme, že nerovnice je splněna, tj. platí $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 36$. Proto vyznačíme tu polorovinu od přímky, která obsahuje počátek. Opět znázorněno na obrázku 1.18.

Stejným způsobem zakreslíme i polorovinu náležející druhé nerovnosti. Na obrázku 1.19je znázorněn stav po zapracování prvních dvou nerovnic. Nakonec narýsujeme i poslední polorovinu náležející třetí nerovnici, viz obrázek 1.20.

Po znázornění všech polorovin náležejících všem nerovnicím musíme ještě narýsovat soustavu přímek představujících účelovou funkci. K tomu zvolíme za z různé hodnoty a pro každou z těchto hodnot sestrojíme jednu přímku.
Po dosazení $z = 2$ do předpisu účelové funkce $z = x_1 + x_2$ dostáváme rovnici $2 = x_1 + x_2$. Této rovnici odpovídá přímka procházející body o souřadnicích $[2, 0]$ a $[0, 2]$.

Obdobně po dosazení $z = 8$ do předpisu účelové funkce $z = x_1 + x_2$ dostáváme rovnici $8 = x_1 + x_2$. Této rovnici odpovídá přímka procházející body o souřadnicích $[8, 0]$ a $[0, 8]$.

Na obrázku 1.21 můžeme vidět, že budeme-li posunovat vodorovné přímky ve směru vzrůstajícího z až na hranici množiny všech přípustných řešení, dostáváme se k přímce s předpisem $14 = x_1 + x_2$, která prochází krajním bodem množiny všech přípustných řešení o souřadnicích $[6, 8]$. Tento bod je tedy přípustným řešením, pro které nabývá účelová funkce maximální hodnoty, a to hodnoty 14. Optimálním řešením je tedy $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $z = 14$. Vyšlo nám tedy stejné optimální řešení jako při výpočtu pomocí simplexové metody.



Obrázek 1.18: Polorovina náležející k první nerovnici v rámci příkladu 1.13

1.6 Příklady k procvičení

1.14. Sestavte matematický model následující úlohy LP:

Vyrábíme a prodáváme dva produkty - P1 a P2, přičemž P1 prodáváme za 60 Kč a P2 za 20 Kč. Na výrobu každého produktu P1 potřebujeme dva kusy dalšího produktu - P3 a dvě hodiny strojového času. Při výrobě P2 vzniká produkt P3 jako vedlejší produkt, a to z každého P2 vzniknou tři kusy P3. Na výrobu každého P2 potřebujeme jednu hodinu strojového času. Jak máme naplánovat výrobu, pokud chceme optimalizovat tržby a přitom víme, že ve sledovaném období disponujeme 100 hodinami strojového času a potřebujeme, aby na konci tohoto období zůstalo alespoň 60 kusů P3?

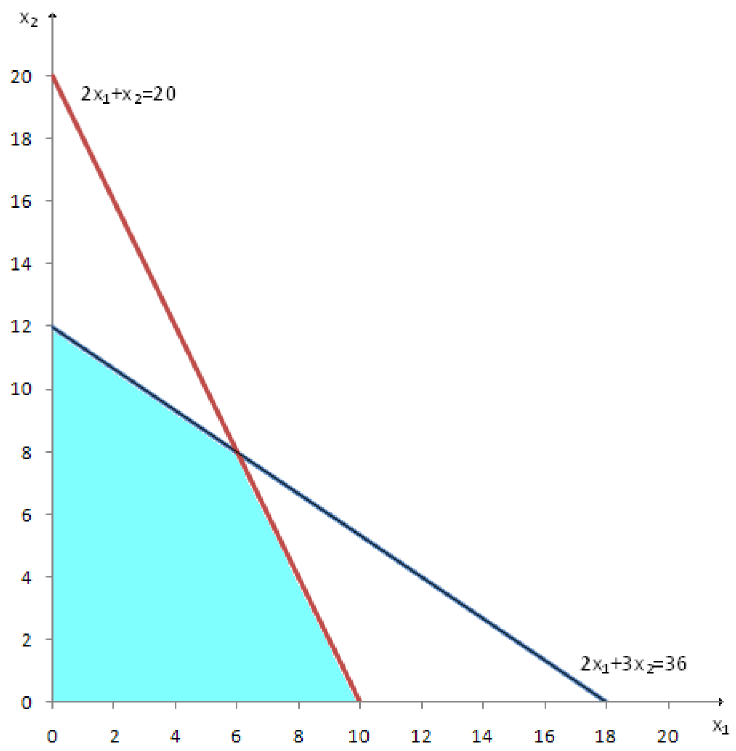
1.15. Sestavte matematický model následující úlohy LP:

Při výrobě pracujeme se dvěma polotovary - P1 a P2, přičemž výrobní náklady na P1 jsou 60 Kč a na P2 jsou 20 Kč. Na výrobu každého polotovaru P1 potřebujeme dva kusy dalšího polotovaru - P3. Z polotovaru P1 můžeme získat dva kusy polotovaru P4. Z polotovaru P2 vznikají tři kusy polotovaru P3 a jeden kus polotovaru P4. Jak máme naplánovat výrobu, pokud chceme optimalizovat výrobní náklady výrobního procesu a přitom potřebujeme, aby na konci tohoto období zůstalo nejvýše 60 kusů P3 a alespoň 100 kusů P4?

1.16. Graficky vyřešte následující úlohu LP.

$$
\begin{aligned}
z &= 12x_1 + 9x_2 \ldots \max \\
-2x_1 + x_2 &\leq 2 \\
2x_1 + 3x_2 &\geq 20 \\
4x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\
x_1 - 4x_2 &\leq 0 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1.17. Graficky vyřešte úlohy LP, jejichž podmínky vlastního omezení a podmínky



Obrázek 1.19: Poloroviny náležející k první a druhé nerovnici v rámci příkladu 1.13

nezápornosti jsou

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \\ -2x_1 + 7x_2 &\geq 14 \\ 4x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a jejichž účelové funkce jsou

a)

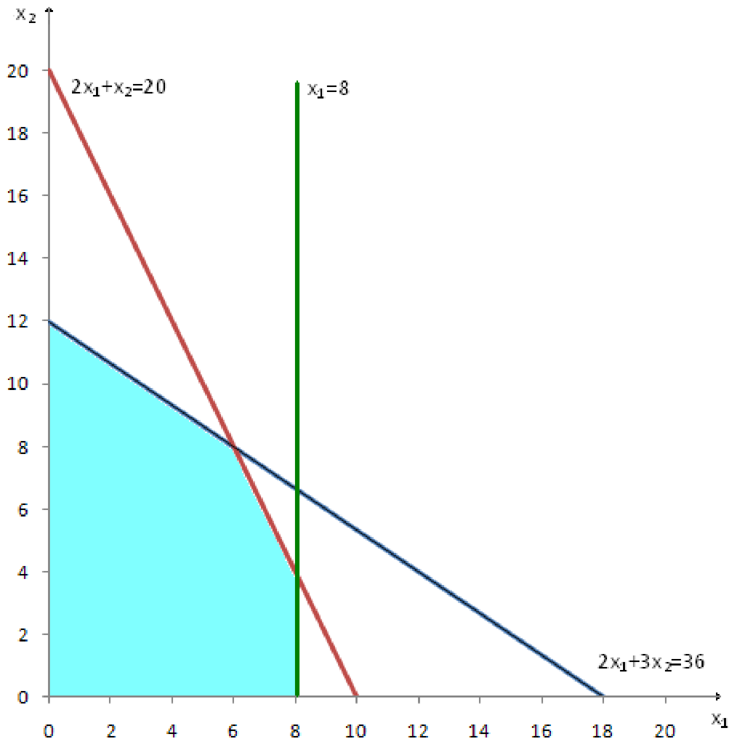
$$z = 4x_1 + 3x_2 \ldots \min$$

b)

$$z = -3x_1 + x_2 \ldots \min$$

1.18. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP.

Vyrábíme dva druhy krmných směsí, přičemž první směs prodáváme za 500 Kč za balík a druhou za 800 Kč za balík. Do obou směsí přidáváme kukuřici. Do každého balíku první směsi přidáváme 1 kg kukuřice, a do druhé 6 kg kukuřice. Výrobní náklady jsou 100 Kč za balík první směsi a 200 Kč za balík druhé směsi. Jak máme naplánovat výrobu, pokud chceme optimalizovat tržby a máme na účtu jen 1400 Kč a na skladu 3600 kg kukuřice a víme, že neprodáme více než 1100 balíků obou směsí dohromady.



Obrázek 1.20: Poloroviny náležející k všem třem nerovnicím v rámci příkladu 1.13

1.19. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP.

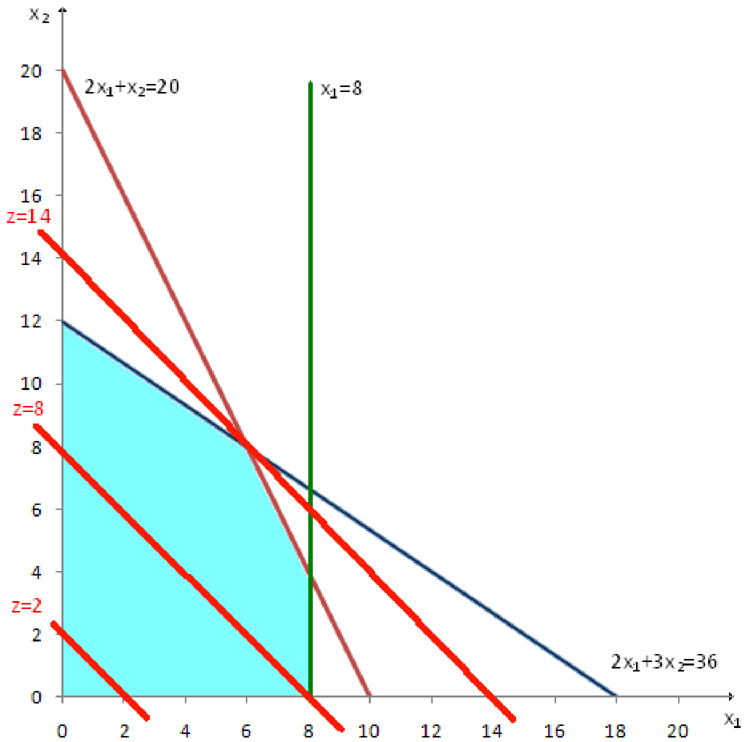
Balírny pražírny kávy plánují výrobu dvou směsí kávy Super a Extra. Pro výrobu obou směsí mají k dispozici 2 druhy kávových bobů K1 a K2. Na skladu mají 36 tun kávových bobů K1 a 14 tun kávových bobů K2. Na výrobu jedné várky kávy Super je třeba 1 tuna bobů K1 a 1 tuna bobů K2. Na výrobu jedné várky kávy Extra je třeba 6 tun bobů K1 a 2 tuny bobů K2. Na základě přímých a nepřímých nákladů souvisejících s výrobou a vzhledem k předpokládané ceně obou směsí byl vykalkulován zisk, který činí 80 000 Kč za jednu várku směsi Super a 50 000 Kč za jednu várku směsi Extra. Management firmy chce naplánovat produkci firmy tak, aby optimalizoval její celkový zisk, přičemž ví, že prodá celkem maximálně 11 várek kávy.

1.20. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP.

Výrobce instantních má k dispozici 2850 g čokolády a 1380 g sušené smetany. Má možnost vyrábět dva druhy instantních nápojů, a to čistý čokoládový nápoj nebo smetanový kakaový nápoj, kde je čokoláda a smetana v poměru 3:2. Nápoje se prodávají plněné do sáčků po 10 g . Čistého čokoládového nápoje se prodá maximálně 100 sáčků. Zisk z jednoho sáčku čistého čokoládového nápoje je 2 Kč a z jednoho sáčku smetanového kakaového nápoje 3 Kč. Kolik sáčků každého druhu má výrobce vyrobit, aby zisk byl maximální.

1.21. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP.

Je třeba určit optimální výrobní program, jestliže známe následující údaje: Podnik je schopen vyrábět 2 druhy výrobků (A, B). Je omezen využitelným fondem pracovní doby v rozsahu 1 000 hodin a disponibilním množstvím suroviny ve výši 1 600 Kg. Norma spotřeby práce je 2 hodiny na kus výrobku A a 4 hodiny na kus výrobku B.



Obrázek 1.21: Soustava přímek znázorňující účelovou funkci v příkladu 1.13

Norma spotřeby suroviny je 4 kg na kus výrobku A a 2 kg na kus výrobku B. Zisk z výrobku A je 20 Kč/kus, z výrobku B 60 Kč/kus.

1.7 Výsledky příkladů

1.14

$$\begin{aligned} z &= 60x_1 + 20x_2 \ldots \text{max} \\ -2x_1 + 3x_2 &\geq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

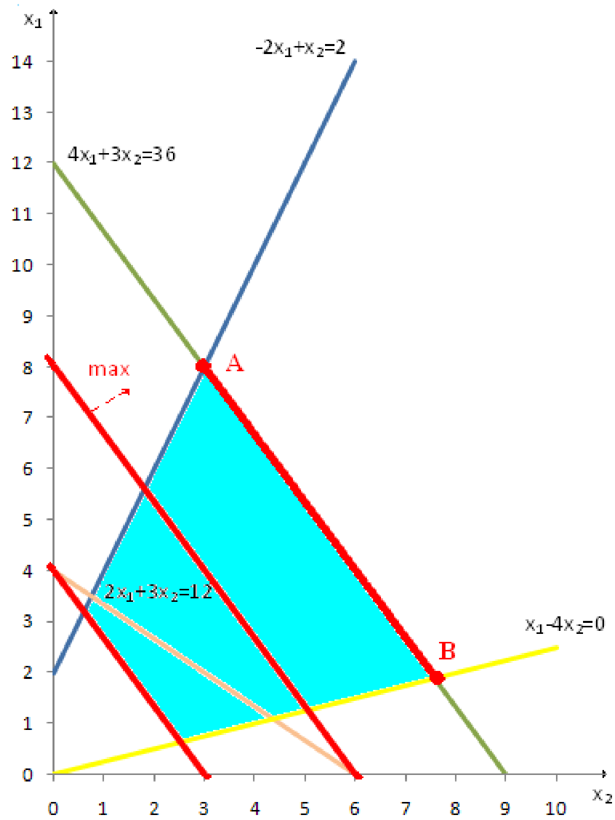
1.15

$$\begin{aligned} z &= 60x_1 + 20x_2 \ldots \text{min} \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 &\geq 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

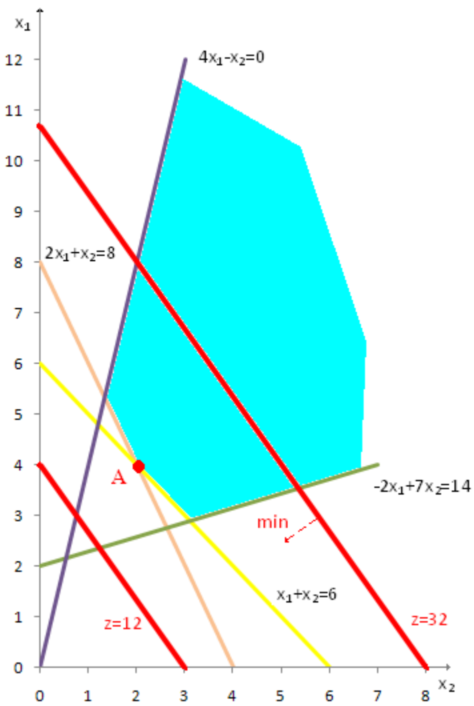
1.16 Grafické řešení je znázorněno na obrázku 1.22, výslednou množinou optimálních řešení je úsečka AB.

1.17

a) Grafické řešení je znázorněno na obrázku 1.23, výsledným jediným optimálním řešením je bod A.

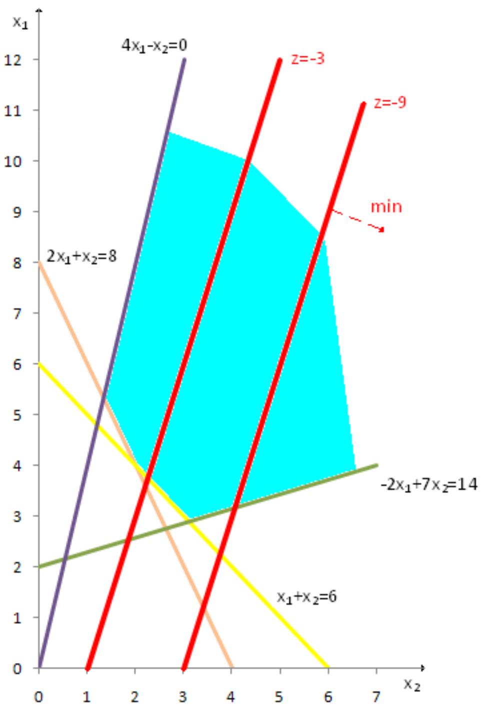


Obrázek 1.22: Grafické řešení úlohy LP v rámci příkladu 1.16



Obrázek 1.23: Grafické řešení úlohy LP v rámci příkladu 1.17a)

b) Grafické řešení je znázorněno na obrázku 1.24, je vidět, že množina všech přípustných řešení je neomezená a účelová funkce klesá na této množině neomezeně. To znamená, že žádné optimální řešení neexistuje.



Obrázek 1.24: Grafické řešení úlohy LP v rámci příkladu 1.17b)

1.18

$$\begin{aligned} z &= 500x_1 + 800x_2 \ldots \text{max} \\ 1x_1 + 6x_2 &\leq 3600 \\ 1x_1 + 1x_2 &\leq 1100 \\ 100x_1 + 200x_2 &\leq 1400 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vyplatí se nám vyrábět pouze první směs, a to v 14 balíků. Druhou směs se nám nevyplatí vyrábět vůbec. Na skladě nám zbyde 3586 kg kukuřice, do limitu maximálního povoleného množství vyrobených balíků nám zbývá 1086 balíků. Vyčerpáme veškeré finance na účtu. V tomto případě utržíme 7000 Kč.

1.19

$$\begin{aligned} z &= 8x_1 + 5x_2 \ldots \text{max} \\ 1x_1 + 6x_2 &\leq 36 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 &\leq 11 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Balírně se nejvíce vyplatí vyrobit 11 várek kávy Extra, žádnou várku kávy Super. Celkem tedy utrží 880 000 Kč. Zbyde 25 tun bobů K1 a 3 tuny bobů K2.

1.20

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 3x_2 \ldots \max \\ x_1 &\leq 100 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 2850 \\ 4x_2 &\leq 1380 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Výrobci se vyplatí vyrobit 78 sáčků čistého čokoládového nápoje a 345 sáčků smetanového kakaového nápoje. Vyrobí se tak o 22 kusů méně, než je maximální povolený limit. Spotřebuje se všechna smetana i všechna čokoláda. Díky tomuto optimálnímu výrobnímu plánu získáme 1 191 Kč.

1.21

$$\begin{aligned} z &= 20x_1 + 60x_2 \ldots \max \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 1600 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vyplatí se vyrábět pouze výrobek B, a to v počtu 250 kusů. Vyčerpá se tím celý volný fond pracovní doby, zbyde 1 100 kg sledované suroviny a vyděláme 15 000 Kč.